

An Herrn
Martin Lieberherr
Kantonsschule Rämibühl MNG
Natw. Inst./Physik
Rämistrasse 54
8001 Zürich

Der Tropfenzähler

Wir haben Tropfen aus einer Pipette gewogen und die Massen statistisch untersucht. Aus der mittleren Tropfenmasse und dem Pipettendurchmesser berechneten wir die Oberflächenspannung von Wasser.

Eva Echantillon und Max Muster
Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl
Klasse 3x
8001 Zürich

Bericht zum Physikpraktikum vom 15. April 2005

Der Tropfenzähler

Lie.

Die Gesetze des Tropfenzählers (Pipette), mit dem z.B. Arzneimittel dosiert werden, sollen quantitativ untersucht und mit der Oberflächenspannung verknüpft werden.

Material: Pipetten mit Gummibalg, Glasschale, Präzisionswaage, Schublehre

Experiment

- i) Bestimmen Sie den Durchmesser der Pipettenöffnung (innen und aussen).
- ii) Notieren Sie sich die Zimmertemperatur.
- iii) Stellen Sie die trockene Glasschale auf die Waage. Halten Sie in einer Tabelle deren Masse mit der Zahl der hineingefallenen Wassertropfen fest. Beginnen Sie bei Tropfenzahl Null. Lassen Sie das Wasser langsam aus der Pipette tropfen, damit Sie mitzählen können und die Tropfen gut geformt sind. Achten Sie beim Wägen auf den Luftzug.
- iv) Wiederholen Sie iii) mit einer anderen Pipette.

Auswertung

- i) Stellen Sie die Masse der Glasschale als Funktion der Tropfenzahl graphisch dar. Führen Sie eine lineare Regression durch und zeichnen Sie die Gerade zu den Messwerten.
- ii) Berechnen Sie die durchschnittliche Tropfenmasse.
- iii) Berechnen Sie aus der durchschnittlichen Tropfenmasse die Oberflächenspannung von Wasser.

1. Einleitung

Gewöhnliche Tinte haftet schlecht auf Folie. Das ist eine Folge der Oberflächenenergie oder -spannung: Sie zieht die Tinte zu kleinen Kügelchen zusammen.

Hustentropfen werden mit dem Tropfenzähler dosiert: Das ist möglich, weil alle Tropfen im Mittel gleich gross sind. Tropfenzähler sind meist Pipetten (Saugröhrchen) mit Gummibalg. Der Zusammenhang von Pipettendurchmesser und Gewicht der Tropfen scheint zuerst von Thomas Tate¹ (Phil. Mug. vol. xxvii. p. 176, 1864) untersucht worden zu sein. Er fand, dass bei langsamer Tropfenformung das Tropfengewicht proportional zum Durchmesser der Pipettenöffnung ist, wenn alle anderen Eigenschaften gleich bleiben.

Dass die Tropfenmasse von der Oberflächenspannung der Flüssigkeit abhängt, wird zur Messung der Oberflächenspannung ausgenützt. Das Messgerät, eine kalibrierte Pipette, wird Stalagmometer² genannt. Man bestimmt die Tropfenmasse und vergleicht sie mit der Tropfenmasse einer bekannten Flüssigkeit.

Die Oberflächenspannung kann durch Zusätze (Tenside) verändert werden. Wasser mit Seife benetzt eine fettige Oberfläche besser als reines Wasser. Die ~~Produktion~~ waschaktiver Substanzen ist eine Grossindustrie. *Produktion* ↑

Wichtig ist die Oberflächenspannung auch in den Alveolen (Lungenbläschen):

"Auf diese *Oberflächenspannung* in jeder der vielen Alveolen ist es u.a. zurückzuführen, daß die Lunge das Bestreben hat, sich zusammenzuziehen. Die genauere Untersuchung zeigt, dass die Alveolen außerordentlich instabil wären, wenn die starken Oberflächenkräfte eines nur aus Wasser bestehenden Films auf sie einwirkten. Tatsächlich ist jedoch die Oberflächenspannung der Alveolen etwa 10mal kleiner, als dies für eine wäßrige Grenzschicht theoretisch zu erwarten wäre. Der Flüssigkeitsfilm enthält also Substanzen, welche die Oberflächenspannung herabsetzen. Wegen dieser Eigenschaft bezeichnet man sie als **oberflächenaktive Substanzen** oder **Surfactants**" (⁷ Seite 578).

2. Theorie

An der Oberfläche haben Flüssigkeitsteilchen meistens eine höhere Energie als im Innern, weil sie nicht allseits gebunden sind. Es ragen quasi freie Bindungen aus der Fläche. Da immer etwa gleich viele Teilchen pro Fläche daliegen, ist auch immer etwa gleichviel Energie pro Fläche in der Oberfläche enthalten.

Definition³:

Die spezifische Oberflächenenergie σ ist die Oberflächenenergie ΔW pro Fläche ΔA .

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} \quad [\sigma] = 1 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$$

Eine Flüssigkeit versucht ihre Oberfläche zu verkleinern und so die Oberflächenenergie zu vermindern. Deshalb werden Tropfen kugelig. Weil sich die Oberfläche zusammenzieht, heisst die Grösse σ auch Oberflächenspannung. Die alternative Definition können wir leicht über die Einheiten plausibel machen:

$$[\sigma] = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad || \quad \sigma = \frac{\Delta F}{\Delta l}$$

Die Oberflächenspannung ist gleich der Kraft pro Länge der Randlinie, mit welcher die Oberfläche an ihrem Rand zieht, um sich zu verkleinern.

Ein Tropfen auf einer Unterlage bleibt kugelig oder breitet sich aus, je nach Grösse der drei Oberflächenenergien Tropfen-Unterlage, Tropfen-Luft sowie Unterlage-Luft. Ist einfach von Oberflächenspannung die Rede, so ist meist jene gegen Luft gemeint.

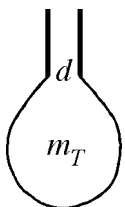


Abbildung 1: Ein Tropfen hängt an einem Röhren mit Öffnungsdurchmesser d .

Bis zu welcher Tropfenmasse m_T trägt die Oberflächenspannung den Tropfen?

Der Rand der Tropfenfläche ist gleich dem Umfang der Öffnung, also gilt⁴:

$$m_T g = \sigma \cdot \Delta l = \sigma \pi d \quad (\text{Gesetz von Tate}^5) \quad \sigma \quad m_T = \frac{\sigma \pi d}{g}$$

3. Experiment

Beilagen: visiertes Originalprotokoll, Auswertungen, Fehlerrechnung

Protokoll zum Versuch "Der Tropfenzähler"

Eva Echantillon und Max Muster, MNG Rämibühl, Klasse 3x

15. April 2005

n	m_x [g]	m_y [g]	
0	23.621	23.620	Zimmertemperatur: 23 - 24 °C (leicht steigend)
1	23.662	23.643	
2	23.699	23.668	Auflösung der Waage: 1 mg Fehlerschranke der Wägung: 1 mg
3	23.742	23.693	
4	23.788	23.716	
5	23.826	23.741	
6	23.861	23.767	
7	23.909	23.792	
8	23.953	23.820	
9	23.988	23.845	
10	24.031	23.866	
11		23.890	
12		23.912	
13		23.938	
14		23.961	
15		23.984	
16		24.007	

Tabelle 1: Wägung einer Glasschale, in die n Wassertropfen gegeben wurden. Bei der ersten Messreihe (m_x) wurden die Tropfen mit einer Glaspipette abgezählt, die eine breite Öffnung aufwies, bei der zweiten Messreihe (m_y) war die Pipette schlanker.

breite Pipette: Rand rundgeschmolzen

Aussendurchmesser an der Spitze (3.00 ± 0.05) mm

Innendurchmesser (1.70 ± 0.05) mm

Gemessen mit Schublehre: Auflösung: 0.05 mm \approx Fehlerschranke

schlanke Pipette: Rand scharfkantig

Aussendurchmesser an der Spitze: (1.30 ± 0.05) mm (Schublehre)

Innendurchmesser an der Spitze: (0.8 ± 0.1) mm (mit Lupe und Massstab geschätzt)

15. 4. 05 lie.

Graphische Auswertung der Tropfschalen-Wägungen

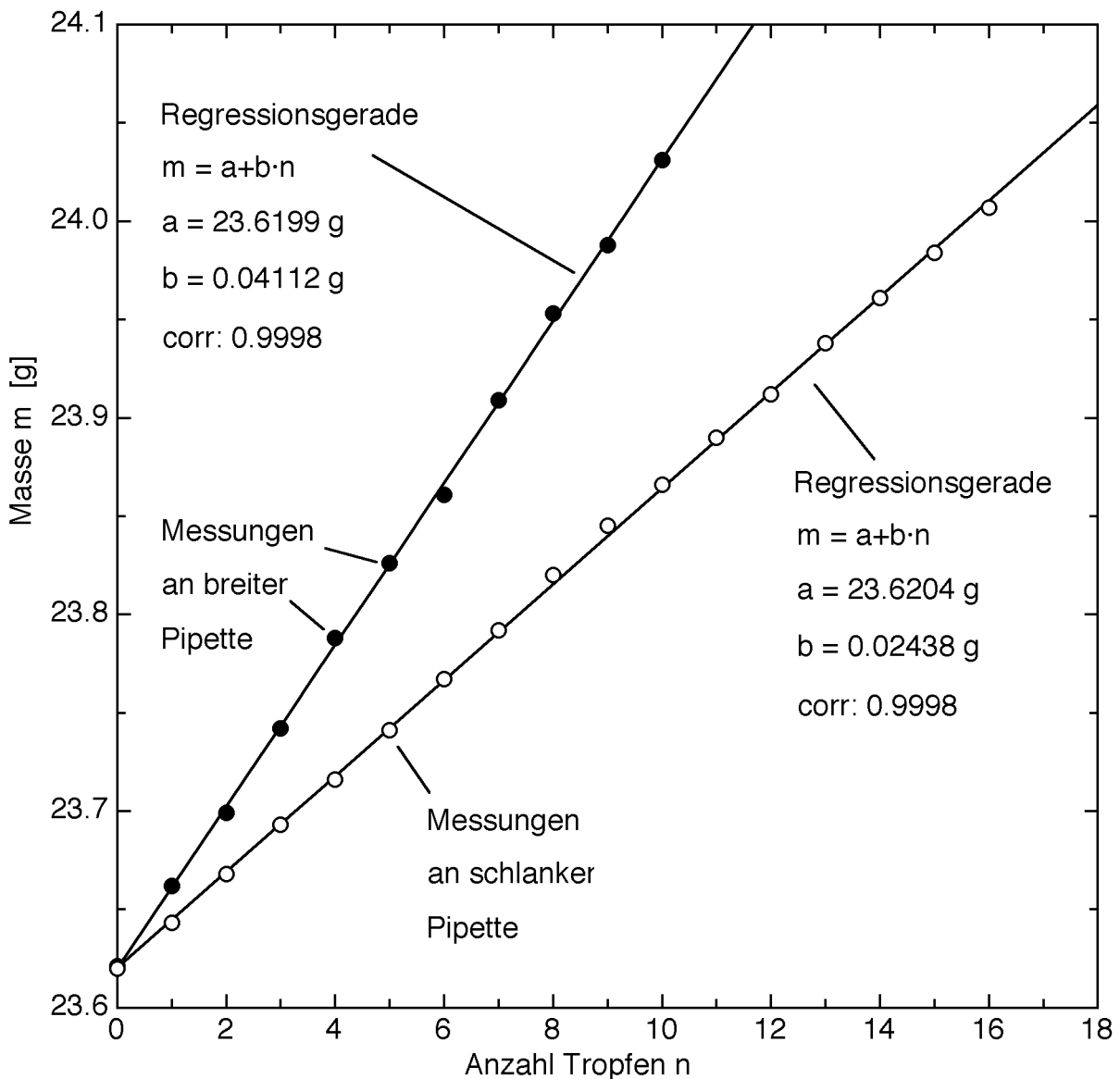


Abbildung 2: Masse m einer Glasschale als Funktion der Anzahl n hinein gegebener Wassertropfen aus Pipetten mit breiter und mit schlanker Öffnung (Tabelle 1, Protokoll). Dazu sind zwei Regressionsgeraden mit ihren Parametern und Korrelationskoeffizienten gezeichnet.

Die Masse der Glasschale nimmt linear mit der Tropfenzahl zu, d.h. die Tropfen aus einer Pipette haben alle etwa dieselbe Masse. Die Steigung der Regressionsgeraden ist gleich der durchschnittlichen Tropfenmasse.

Bestimmung der mittleren Tropfenmasse

n	m _{Tb} [g]	m _{Ts} [g]
1	0.041	0.023
2	0.037	0.025
3	0.043	0.025
4	0.046	0.023
5	0.038	0.025
6	0.035	0.026
7	0.048	0.025
8	0.044	0.028
9	0.035	0.025
10	0.043	0.021
11		0.024
12		0.022
13		0.026
14		0.023
15		0.023
16		0.023
Mittelwert	0.04100	0.02419
Standardabweichung	0.00457	0.00176

Tabelle 2: Aus zwei aufeinander folgenden Wägungen der Tropfschale (Protokoll, Tabelle 1) wurden die Massen der einzelnen Tropfen berechnet. m_{Tb} ist die Masse eines Tropfens aus der Pipette mit breiter Öffnung, m_{Ts} steht für das analoge aus schlanker Pipette. Das arithmetische Mittel und die Standardabweichung hat das Tabellenkalkulationsprogramm Excel berechnet.

Zusatz:

Wenn \bar{x} das arithmetische Mittel einer Grösse $x_i, i = 1 \dots n$ ist, so nennt man

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

die empirische Standardabweichung der Einzelmessung³.

Die Standardabweichung ist ein Mass dafür, wie stark die Grösse um den Mittelwert schwankt. Ist die Grösse normalverteilt, so erwartet man, dass 68% aller Werte im Intervall $\bar{x} \pm s$ liegen. Für unsere Tropfen beträgt die Standardabweichung 11.1% ("breite Pipette") respektive 7.28% ("schlanke Pipette") des Mittelwerts.

Der mittlere Fehler des Mittelwerts³ ist s/\sqrt{n} , d.h. je mehr Tropfen abgezählt werden, desto genauer ist die mittlere Tropfenmasse bestimmt. In unserem Fall ist der mittlere Fehler des Mittelwerts 1.45 mg ("breit") resp. 0.440 mg ("schlank").

Berechnung der Oberflächenspannung mit Fehlerschranken

Es wurde die durchschnittliche Tropfenmasse aus Tabelle 2 verwendet und die absolute Fehlerschranke der Wägungen aus dem Protokoll. Die Differenz aufeinander folgender Wägungen (= Tropfenmasse) hat die absolute Fehlerschranke 2 mg.

Rechnung für die Pipette mit breiter Öffnung (Innendurchmesser)

$$\sigma = \frac{m_T g}{\pi d} = \frac{41.00 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 9.8065 \text{ m/s}^2}{\pi \cdot 1.70 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 0.075437 \text{ N/m}$$

Fehlerschranke addiert oder subtrahiert, damit das Resultat möglichst gross wird:

$$\sigma_{\max} = \frac{(41.00 + 2) \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 9.8065 \text{ m/s}^2}{\pi \cdot (1.70 - 0.05) \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 0.081348 \text{ N/m}$$

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma = 0.081348 \text{ N/m} - 0.075437 \text{ N/m} = 0.005911 \text{ N/m}$$

$$\sigma = 0.075437 \text{ N/m} \pm 0.005911 \text{ N/m} = \underline{\underline{(0.075 \pm 0.006) \text{ N/m}}}$$

Dieselbe Rechnung mit dem Aussendurchmesser ergibt $(0.043 \pm 0.003) \text{ Nm}^{-1}$

Dieselbe Rechnung für die Pipette mit schlanker Öffnung ergibt:

$$\sigma = (0.09 \pm 0.02) \text{ N/m} \text{ (berechnet mit dem Innendurchmesser) und}$$

$$\sigma = (0.058 \pm 0.007) \text{ Nm}^{-1} \text{ (Aussendurchmesser)}$$

Die Rechnungen mit den Aussendurchmessern der Pipettenspitzen ergeben Werte, die im Rahmen der Fehlerschranken nicht mit den Literaturwerten übereinstimmen (vergl. Schlussfolgerungen).

Zusatz

In der statistischen Auswertung wurde der mittlere Fehler des Mittelwerts berechnet (empirische Standardabweichung). Eine gute Schätzung der absoluten Fehlerschranke ist das Doppelte dieses Wertes³. Verwendet man sie und den Innendurchmesser der Pipetten, so erhält man folgende Oberflächenspannungen:
 breite Pipette: $(0.075 \pm 0.008) \text{ Nm}^{-1}$ schlanke Pipette: $(0.09 \pm 0.02) \text{ Nm}^{-1}$
 Das passt ungefähr zu den gerade vorher bestimmten Werten.

4. Schlussfolgerungen

Resultate: Wir haben im Experiment zeigen können, dass die Masse der einzelnen Wassertropfen aus einer Pipette nur Grössenordnung 10% um den Mittelwert schwankt. Wir haben auch gesehen, dass aus Röhren mit grossen Öffnungen schwerere Tropfen fallen als aus Röhren mit engem Auslass. Mit Hilfe des Gesetzes von Tate bestimmten wir die Oberflächenspannung von Wasser zu $(75 \pm 6) \cdot 10^{-3}$ N/m (breite Pipette) und (0.09 ± 0.02) N/m (schlanke Pipette). Die Literaturwerte⁶ für die Oberflächenspannung von Wasser sind 74.23 mN/m bei 10 °C, 72.75 mN/m bei 20 °C und 71.20 mN/m bei 30 °C. Unsere Messungen stimmen innerhalb der Fehlerschranken mit dem Literaturwert für 20 °C überein.

Reflexion: Wir haben gesehen, dass der Tropfenzähler ein geeignetes Gerät ist, um kleine Flüssigkeitsmengen in einfacher Weise abzumessen. Wollte man die Oberflächenspannung genauer messen, so müsste man den Pipettendurchmesser besser bestimmen (Benetzung) und die Tropfen einzeln wägen. Man müsste auch auf die Temperatur achten (Verdunstungskälte!). Eine langsame Abgabe der Tropfen ist wesentlich¹. Man könnte auch untersuchen, welchen Einfluss Seife oder andere gelöste Stoffe auf die Tropfenmasse haben.

5. Quellen

¹ http://encyclopedia.jrank.org/SUS_TAV/T31.html (Aufruf am 15. April 2005)

² <http://i115srv.vu-wien.ac.at/physik/ws95/w9570dir/w9576000.htm> (Aufruf 3. 8. 2005)

³ "Formeln und Tafeln", DMK/DPK, Orell Füssli Verlag, Zürich, 9. Auflage, 2001

⁴ Theorieheft Physik, Eva Echantillon, MNG Rämibühl, Klasse 2x, 2004

⁵ <http://camtel.demonweb.co.uk/files/AP011.PDF> (Aufruf am 15. April 2005)

⁶ CRC Handbook of Chemistry and Physics, D.R. Lide (Ed.), CRC Press, Boston, 71st Edition (1990)

⁷ "Physiologie des Menschen" Schmidt, Thews (Hrsg.), 24. Auflage, Springer Verlag

Bemerkungen zum Musterbericht

Lie.

Layout: Halten Sie sich möglichst eng an das Muster: Gerade Schrift (z.B. Arial oder Helvetica, 12 Punkt, doppelter Zeilenabstand, Titel grösser, Kopfzeile kleiner), Innenrand 3.0 cm, andere Ränder ca. 2 cm, auch beim Protokoll, Reihenfolge resp. Kapiteleinteilung wie im Muster, ev. Zwischentitel verwenden. Das Protokoll muss, die Auswertung darf von Hand geschrieben werden, der Rest mit dem Computer (einseitig drucken). Seiten, Abbildungen und Tabellen müssen am Schluss durchgängig nummeriert werden. Ein Bericht soll nicht mehr als 10 Seiten haben.

Titelseite: Aussagekräftiger Titel (nicht "Physikbericht"), Schuladresse des Lehrers und der Schüler/-innen, Datum des Versuchs, Kurzfassung von 2-4 Zeilen.

Aufgabenblatt: Als Seite 2 einordnen. Blatt sauber halten.

Einleitung: Sie soll eine geschichtliche oder anwendungsorientierte Einführung ins Thema sein. Keine Formeln, keine Erklärung des Versuchs (das kommt später). Sie sollen sich aus Quellen informieren, aber diese müssen angegeben werden. Bei Zitaten (direkte Übernahme von mehr als drei Worten hintereinander) müssen Anführungszeichen gesetzt werden unter Angabe der Seitenzahl. Bei Bildern lässt man die Anführungszeichen weg. **Zitate ohne Quellenangabe sind Diebstahl!** Das gilt auch für Zitate aus dem Internet. Der Text muss zum grösseren Teil selbst formuliert werden. Eine Seite darf maximal drei Schreibfehler enthalten. Sie dürfen, wenn es nur wenig ist, handschriftlich korrigieren. Umfang maximal eine Seite.

Theorie: Hier sollen die notwendigen Definitionen und Gesetze angegeben werden mit Erklärung der Variablen. Umfang maximal eine Seite.

Experiment: Das visitierte Originalprotokoll muss beigelegt werden (ev. doppelseitig). Der Kopf muss wie im Muster ausgeführt werden. Es muss so vollständig sein, dass ein anderes Team zusammen mit der Anleitung einen Bericht schreiben könnte (Fehlerangaben!). Die Auswertung muss vollständig sein inklusive Fehlerrechnung. Die Auswertung mit Fehlerrechnung hat für die Note das grösste Gewicht. Graphiken und Tabellen eindeutig beschriften und mit ausführlicher Legende versehen. Für eine sehr gute Note verlange ich in der Auswertung (nicht in Einleitung oder Theorie) einen zusätzlichen, nicht verlangten Effort.

Schlussfolgerungen: Alle Resultate aus den Experimenten müssen kurz und in selbsterklärender Art angegeben werden. Zahlenwerte mit Literaturwerten vergleichen. Probleme/Erweiterungsmöglichkeiten reflektieren. Umfang ca. $\frac{2}{3}$ Seite.

Quellen: Alle Informationsquellen müssen so angegeben werden, dass man sie wieder finden kann: Autoren - Titel - Auflage oder Journal/Band/Seiten - Jahrgang - Verlag. Bei Informationen aus dem Internet: URL mit Datum des Aufrufs.