Formelblatt Physik HSGYM

24. November 2019, M. Lieberherr

Viele Gesetze und Informationen auf dieser Seite sollten vom Gymnasium her bekannt sein und angewendet werden können. Folgen Sie den braunen oder blauen Links für weitergehende Auskünfte oder dem Index.

Phys. Rechnen

Eine Grösse umfasst Zahlenwert und Einheit. Für gegebene und gesuchte Grössen werden Platzhalter eingeführt. Eine Schlussformel ist nach der gesuchten Grösse aufgelöst und enthält nur Variable für gegebene Grössen. Das Resultat hat ebenso viele signifikante Stellen wie die ungenaueste Ausgangsgrösse.

Mechanik

$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$

$1\,\mathrm{m/s} = 3.6\,\mathrm{km/h}$

$a = \frac{dv}{dt}$

$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$v = v_0 + at$

$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$

$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$

$\rho = \frac{m}{V}$

$\rho_{\mathrm{Wasser}} = 998\,\mathrm{kg/m^3}$

$\rho_{\mathrm{Luft}} = 1.293\,\mathrm{kg/m^3}$

Im Inertialsystem gilt:

$\vec{F}_{\mathrm{res}} = m\vec{a}$

actio = reactio

$F_G = mg$

$F_F = Dy$

$F_{GR} = \mu_G F_N$

$0 \leqslant F_{HR} \leqslant \mu_H F_N$

$W = F_s s = Fs\cos\alpha$

$E_2 - E_1 = W + \dots$

$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$

$E_{\mathrm{pot}} = mgh$

$E_F = \frac{1}{2}Dy^2$

$E_{kin} + E_{pot} + \dots = \mathrm{const}$

$P = \frac{W}{\Delta t}$

$\eta = \frac{W_2}{W_1}$

$1\,\mathrm{kWh} = 3.6\,\mathrm{MJ}$

$\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = \mathrm{const}$

$\vec{F}_{\mathrm{res}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \frac{v}{r}$

$a_z = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

$F_G = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

$G = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}$

$M = aF = rF\sin\alpha$

$a_1F_1 = a_2F_2$

$p = \frac{F_N}{A}$

$W = p\Delta V$

$p_n = 101325\,\mathrm{Pa}$

$p = \rho gh$

$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v^2$

$F_A = \rho_F g V_K$

$vA = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \mathrm{const}$

$F_w = c_w A \frac{1}{2}\rho v^2$

Wärme

$T - \vartheta = 273.15\,\mathrm{K}$

$\Delta l = \alpha l_0 \Delta\vartheta$

$\Delta Q = cm\Delta\vartheta$

$c_{\mathrm{H_2O}} = 4182\,\mathrm{J/(kg \cdot K)}$

$Q = mL$

$L_{\mathrm{V\text{-}H_2O}} = 2.257 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg}$

$J = \frac{\Delta Q}{A\Delta t} = U\Delta\vartheta$

$J = \sigma T^4$

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$

$J_S = 1366\,\mathrm{W/m^2}$

$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$

$1\,\mathrm{u} = 1.661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$M = m/n$

$pV = Nk_BT = nRT$

$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K)}$

$R = 8.314\,\mathrm{J/(mol \cdot K}$

$V_{mn} = 22.4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3/mol}$

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_BT$

$\Delta U = Q + W + \dots$

$pV^\varkappa = const$

$Q = mH$

$\eta = \frac{T_w - T_k}{T_w}$

Elektrizität

$e = 1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

$\Sigma Q_i = \mathrm{const}$

$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1Q_2}{r^2}$

$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q}$

$E = \frac{\varepsilon_0 Q}{A}$

$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = E \cdot \Delta s_{AB}$

$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

$R = \frac{U}{I}$

Ohm: $U \propto I$

$R = \rho_{el}\frac{l}{A}$

$\rho_{el,Cu} = 1.78 \cdot 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$

$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$

$R_{\mathrm{seriell}} = R_1 + R_2$

$\frac{1}{R_{\mathrm{parallel}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$U_{\mathrm{seriell}} = U_1 + U_2$

$I_{\mathrm{parallel}} = I_1 + I_2$

$F = IlB\sin\alpha$

$F = qvB\sin\alpha$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$\mu_0 = 1.2566 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$

$U_{\mathrm{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$

$\Phi = AB_\perp$

$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t)$

$U_{\mathrm{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$

Schwingungen/Wellen

$y(t) = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi_0)$

$T = 2\pi\sqrt{m/D}$

$T = 2\pi\sqrt{l/g}$

$\alpha_r = \alpha_1$

$n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2$

$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$

$u(x,t) = \hat{u}\sin(kx - \omega t)$

$c = \lambda f$

$c_{\mathrm{Licht}} = 2.99792458 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

$c_{\mathrm{Schall}} = 344\,\mathrm{m/s}$

$d\sin\alpha_m = m\lambda$

$L = 10 \cdot \lg\frac{J}{J_0},\ J_0 = 10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$

Modernes

$N = N_0 e^{-\lambda t}$

$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$

$A = \lambda N$

$D = E/m$

$E = mc^2$

$E = hf$

$h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$

$p = h/\lambda$

Formelblatt

Gebrauchsanleitung
Das Formelblatt ist ein Inhaltsverzeichnis mit Doppelnutzen. Die Formeln geben einen groben Überblick über physikalische Inhalte, die an einem Schweizer Gymnasium vermittelt werden. Die bunt gefärbten Zeichen sind Links auf einen erklärenden Anhang. Dort findet man Beispiele und weiterführende Informationen. Sie können auch via den alphabetischen Index auf die Erläuterungen zugreifen.

Die aufgeführten Gesetze richten sich grob nach den Empfehlungen der Fachkonferenz Physik im Projekt HSGYM. Sie können die Empfehlungen unter www.aphel.ch/hsgym abrufen. Das Formelblatt enthält fast alle Punkte aus dem "Pflichtteil" des Minimalprogramms sowie einige Items aus dem Wahlbereich. Items aus dem "Pflichtbereich" sind in der Randspalte mit "Pflicht" gekennzeichnet und auf dem Formelblatt blau markiert. Items aus dem Wahlbereich sind in der Randspalte mit "Kür" gekennzeichnet und auf dem Formelblatt braun markiert. Da Schweizer Gymnasien den Physikunterricht zeitlich schwach dotieren, sind die Lehrkräfte manchmal gezwungen, viele Themen aus dem Wahlbereich wegzulassen. Die aufgeführten Gesetze sind ein Teil dessen, was vom Autor mit einer Schulklasse im neusprachlichen Gymnasialprofil in sechs Jahresstunden behandelt wurde (6 Jahresstunden heisst hier zwei Lektionen pro Woche verteilt auf drei Schuljahre).

Pflicht

Kür

Für Studentinnen und Studenten
Das Formelblatt fasst einige Gesetze und Informationen zusammen, die Sie mehrheitlich aus dem Mittelschulunterricht kennen und aktiv beherrschen sollten. Sie können das Blatt, indem Sie den Links folgen, zur Vorbereitung auf die Physikvorlesung durcharbeiten. Wir schätzen, dass Sie dazu etwa einen Arbeitstag benötigen. Sie können das Formelblatt auch ausdrucken und als Spick zum Lernen verwenden.

Für Hochschuldozentinnen und Dozenten
Das Formelblatt (mit den verlinkten Beispielen und Kommentaren) soll Ihnen eine Übersicht über das physikalische Vorwissen von Studentinnen und Studenten aus einem Schweizer Gymnasium geben. Sie dürfen erwarten, dass fast alle genannten Informationen in einem grösseren Auditorium vorhanden sind (vielleicht in anderer Notation). Ein individueller Student oder eine Studentin kennt vielleicht 80 % aller Gesetze aus dem "Pflichtteil" und 50 % aus dem "Wahlbereich". Ihnen wird sicher auffallen, dass einige Gesetze zu einfach, zuwenig genau, zu speziell oder nicht nach Ihrer Sprachkonvention aufgeführt sind. Das ist teilweise Absicht, denn das Dokument soll das Vorwissen aus dem Gymnasium abbilden. Es ist Ihre Aufgabe, die Gesetze zu ergänzen, schärfen, verallgemeinern oder im Niveau anzuheben, damit sie den Ansprüchen einer Hochschule genügen.

Zurück zum Formelblatt.

Physik

Der Name geht auf den griechischen Wortstamm physis (Natur) zurück.

Physik ist eine quantitative Naturwissenschaft.

“Naturwissenschaft”, um sie von den Geistes- und Sozialwissenschaften (Sprachen, Geschichte, Mathematik, Recht etc.) sowie den technischen Wissenschaften (Elektrotechnik, Informatik, Maschinenbau usw.) zu unterscheiden. Die Grenzen zu anderen Naturwissenschaften (Chemie, Biologie etc.) sind fliessend.

“Quantitativ” oder exakt, weil die Natur in Zahlen ausgedrückt wird. Die Zahlen sind in Experimenten gemessene Grössen, deren Genauigkeit abgeschätzt ist. Da ein grosser Zahlenhaufen unanschaulich wird, werden die Zahlen durch mathematisch formulierte Theorien modelliert. Die Theorien erlauben Vorhersagen und sind für Anwendungen in der Technik sehr nützlich. Experimente und Theorien ergänzen und befruchten sich gegenseitig.

Zurück zum Formelblatt.

HSGYM: Projekt Hochschule Gymnasium

Das Projekt HSGYM ist 2006 im Kanton Zürich gestartet worden. Gymnasiale und universitäre Lehrkräfte haben haben sich zusammengesetzt, um den Übertritt für Maturandinnen und Maturanden vom Gymnasium an die Hochschulen zu verbessern. Details kann man unter www.hsgym.ch erfahren.

Dieses Dokument ist von der Kerngruppe Physik zusammengestellt worden. Zur Kerngruppe gehören Anna Prieur (Kantonsschule Zürich Nord), Paolo Hsiung (Kantonsschule Freudenberg), Martin Lieberherr (Leiter der Kerngruppe, Kantonsschule Rämibühl MNG, Autor), Christof Aegerter (Universität Zürich) und Andreas Vaterlaus (Eidgenössische Technische Hochschule Zürich).

Für die Kerngruppe: Martin Lieberherr Zürich, den 24. November 2019

Zurück zum Formelblatt.

Physikalische Grösse

Pflicht

Eine physikalische Grösse besteht aus Zahlenwert und Einheit, z.B. 35 kg oder $6.022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$. Physikalische Gleichungen sind Grössengleichungen, d.h. sie müssen mit Zahlenwert *und* Einheit stimmen.

Gleichungen müssen in den Einheiten konsistent sein. Die Gleichung $5 = 5\,\mathrm{m}$ ist falsch. Die Gleichung $1 = 100$ ist falsch, aber $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}$ ist richtig. Die Gleichung $6\,\mathrm{kg} = 6\,\mathrm{L}$ ist falsch, auch für Wasser (Masse ≠ Volumen → $m = \rho V$).

Zahlenwert und Einheitensymbol werden separat nach den Regeln der Algebra verrechnet: Nur Grössen mit gleichen Einheiten dürfen addiert oder subtrahiert werden. Grössen mit verschiedenen oder gleichen Einheiten dürfen mutipliziert und dividiert werden. Grössen dürfen aber nur potenziert werden, falls keine Einheiten mit gebrochenen Exponenten entstehen: $\sqrt{23\,\mathrm{m}^2}$ ist erlaubt, aber $\sqrt{16\,\mathrm{m}}$ ist nicht definiert.

Höhere Funktionen dürfen nur auf reine Zahlen angewendet werden.

$$\log(20\,\mathrm{mol}) \quad \text{falsch!} \quad \rightarrow \log\frac{n}{n_0} = \log\frac{20\,\mathrm{mol}}{1.0\,\mathrm{mol}} = \log 20 \quad \checkmark$$

Zurück zum Formelblatt.

Zahlenwert

Pflicht

In der Physik kommen oft sehr grosse oder kleine Zahlen vor. Damit die Grössenordnung (der Stellenwert der ersten Ziffer) leicht erkennbar ist, werden die *wissenschaftliche Zahlenschreibweise* oder *Dezimalvorsätze* verwendet.

Wissenschaftliche Zahlenschreibweise

$$600000000000000000000000 \rightarrow 6.0 \cdot 10^{23}$$

$$0.000000000106 \rightarrow 1.06 \cdot 10^{-10}$$

In der wissenschaftlichen Zahlenschreibweise steht genau eine Ziffer ungleich Null vor dem Dezimalpunkt.

Dezimalvorsätze

$$3800000\,\mathrm{W} \rightarrow 3.8\,\mathrm{MW}$$

$$0.000072\,\mathrm{m}^2 \rightarrow 72\,\mathrm{mm}^2$$

$$4\,\mathrm{cm}^3 = 4\,(\mathrm{cm})^3 = 4 \cdot (10^{-2}\,\mathrm{m})^3 = 4 \cdot (10^{-2})^3\,\mathrm{m}^3 = 4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$$

Dezimalvorsätze werden mit potenziert. Eine Grösse soll nur einen Dezimalvorsatz enthalten. Dezimalvorsätze und wissenschaftliche Zahlenschreibweise sollen nicht vermischt werden.

Vorsatz	Abk.	Faktor
Deka	da	10^{1}
Hekto	h	10^{2}
Kilo	k	10^{3}
Mega	M	10^{6}
Giga	G	10^{9}
Tera	T	10^{12}
Peta	P	10^{15}
Exa	E	10^{18}
Zetta	Z	10^{21}
Yotta	Y	10^{24}

Vorsatz	Abk.	Faktor
Dezi	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}
Zepto	z	10^{-21}
Yokto	y	10^{-24}

Tabelle 1: Diese Dezimalvorsätze sind im SI definiert. Gross- und Kleinschreibung müssen streng beachtet werden. Zwischen mW (Milliwatt) und MW (Megawatt) liegen neun Zehnerpotenzen!

Zurück zum Formelblatt.

Einheit

Pflicht

Eine Grösse besteht aus Zahlenwert und Einheit, z.B. 87 km. Eine Angabe mit fehlender Einheit ist unvollständig. Wir verwenden meistens SI-Einheiten (Système international d'unités).

SI-Basiseinheiten
Sekunde (s), Meter (m), Kilogramm (kg), Kelvin (K), Mol (mol), Ampere (A), Candela (cd)

abgeleitete Einheiten
Newton (N), Joule (J), Watt (W), Coulomb (C), Volt (V), etc.
Die abgeleiteten Einheiten sind durch Multiplikation oder Division aus den Basiseinheiten ableitbar.

Nicht-SI Einheiten
Pfund, Elektronvolt, Jahr, Kalorie, Meile, etc.

Der Ausdruck $[a]$ mit eckigen Klammern heisst "Einheit von a", also z.B. $[23\,\mathrm{N}] = \mathrm{N}$.

Beispiel: Aus welchen SI-Basiseinheiten setzt sich die Einheit 'Watt' zusammen?

$$[P] = \left[\frac{W}{\Delta t}\right] = \left[\frac{F_s \cdot s}{\Delta t}\right] = \left[\frac{ma \cdot s}{\Delta t}\right] = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$$

Die korrekte Mitführung der Einheiten gestattet eine *Einheitenkontrolle* der Schlussformel. Wenn sich die Einheiten der eingesetzten Grössen nicht zur Einheit der gesuchten Grösse zusammensetzen lassen, ist ein Fehler passiert.

Beispiel: Kann die vorgeschlagene Formel für den Ersatzwiderstand dreier, parallel geschalteter Widerstandselemente stimmen?

zwei Widerstände

$$R_{\mathrm{res}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

drei Widerstände ?

$$R_{\mathrm{res}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Die Antwort ist Nein, denn die vorgeschlagene Formel liefert die Einheit $1\,\Omega^3/\Omega = 1\,\Omega^2 \neq [R_{\mathrm{res}}] = 1\,\Omega$.

Zurück zum Formelblatt.

Platzhalter

Pflicht

Physikalische Probleme werden in einem ersten Schritt *formalisiert*: Für alle Grössen (gegeben, gesucht, fehlend, etc.) der Aufgabe werden Platzhalter (Variable, Parameter, Konstanten) eingeführt. Üblicherweise sind das Buchstaben, eventuell mit Index. Die Bezeichnungen sind im Prinzip frei, sollten aber lesefreundlich gewählt werden, z.B. F oder K für Kraft, s für Strecke, t für Zeit (time), etc.

Beispiel: Ein Auto fährt in 90 Minuten 120 Kilometer weit. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit.
Formalisierung: Zeit $t = 90\,\mathrm{min}$, Weg $s = 120\,\mathrm{km}$, Bahngeschwindigkeit υ (gesucht)

Die Bezeichnungen müssen innerhalb einer Aufgabe eindeutig sein, dürfen aber von Aufgabe zu Aufgabe ändern. Einheitensymbole und ganze Worte dürfen nicht als Platzhalter missbraucht werden. Gleichungen der Art "$\mathrm{kg} = \mathrm{Dichte} \cdot V$" sind verpönt.

Beispiel: Vervollständigen Sie die Formalisierung in folgender Gleichung:
$\mathrm{meter} = 12\,\mathrm{km} + 60 \cdot t$
Lösung: $s = s_0 + \upsilon t$ (oder $r = b + Vt$, etc.)

Beispiel: Welche Masse hat ein Salzkorn?
Gesucht: Masse m, tabelliert: Dichte $\rho = 2.17\,\mathrm{g/cm^3}$, geschätzt: Volumen $V \approx a^3 \approx (0.5\,\mathrm{mm})^3$

Tabellierte Grössen findet man in einem Tabellenwerk oder im Internet. Aus dem Mittelschulunterricht sollte man einige tabellierte Grössen kennen (Dichte, spez. Wärmekapazität, etc.). Einige Grössen muss oder soll man vernünftig abschätzen. Die Lösung der Aufgabe darf dann eine gewisse Bandbreite aufweisen.

Zurück zum Formelblatt.

Schlussformel

Pflicht

Nachdem die Aufgabe formalisiert worden ist, wird sie rein formal gelöst. Die formale Lösung ist ein Term für die gesuchte Grösse, der nur Platzhalter für bekannte Grössen enthält.

Beispiel: Eine Stahlkugel hat eine Masse von 28.7 g. Berechnen Sie ihre Oberfläche rein formal.

Lösung: Die Dichte ρ von Stahl ist tabelliert (bekannt) und kann verwendet werden.

$$m = \rho V = \rho \cdot \tfrac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow r = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{2/3}$$

Schlussformeln sollen vereinfacht werden: Kein Doppelbrüche, Quadrate unter Wurzeln oder ähnliches. Die formale Lösung soll einheitenmässig konsistent sein, also z.B. keine Wurzeln aus Basiseinheiten enthalten.

Beispiel: Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \checkmark \qquad \text{und nicht} \quad T = \frac{\sqrt{\pi^2 \ell}}{\frac{1}{2}\sqrt{g}} \quad \text{Was ist Wurzel aus Meter?}$$

Beispiel: Eine Skaterin (58 kg) rollt eine 23 m lange Strasse hinab, die 7.4° gegen die Horizontale geneigt ist. Sie starte aus der Ruhelage. Mit welcher Geschwindigkeit kommt sie unten an?

$$ma = F_{\text{res}} = F_{G\|} = mg\sin\alpha \Rightarrow a = g\sin\alpha$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) = 2sg\sin\alpha$$

$$v = \sqrt{2sg\sin\alpha} \quad \text{Die Schlussformel enthält die Masse nicht mehr!}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 23\,\text{m} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 7.4°} = \underline{\underline{7.6\,\text{m/s}}}$$

Bemerkung: Die formale Lösung entspricht $v = \sqrt{2gh}$ mit dem Höhenunterschied $h = s\sin\alpha$.

Schlussformeln lassen leichter Zusammenhänge erkennen als zusammengestückelte Zahlenrechnungen. Formale Lösungen lassen sich leichter wiederverwerten.

Zurück zum Formelblatt.

Signifikante Stellen

Pflicht

Es gibt keine exakten Messgrössen! Andererseits sind Grössen, deren Genauigkeit völlig unbestimmt ist, wertlos. Zu jeder Grösse gehört also die Information, *wie* genau sie ist.

Signifikante Stellen oder wesentliche Ziffern ermöglichen es, die Genauigkeit einer Grösse auf einfache Art auszudrücken. Signifikante Stellen sind alle Ziffern einer Dezimalzahl, die gesichert sind oder zumindest nicht völlig unbestimmt. Führende Nullen werden nicht mitgezählt. Bei dieser Zählweise ist die Lage des Dezimalpunkts egal.

$17.38\,\mathrm{m}$	vier wesentliche Ziffern
$0.007\,\mathrm{s}$	eine signifikante Stelle
$23.0\,\mathrm{kg}$	drei signifikante Ziffern
$1.0 \cdot 10^4\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{km}$	zwei wesentliche Stellen
$10^7\,\mathrm{A}$	keine signifikante Stelle, “Grössenordnung”
$1000\,\mathrm{m} \stackrel{?}{=} \begin{cases} 1\,\mathrm{km} \\ 1.000\,\mathrm{km} \end{cases}$	Zahl der wesentlichen Ziffern im Alltag oft unklar

Die Genauigkeit einer Grösse durch ihre signifikanten Stellen auszudrücken, ist zwar grob, aber einfach anwendbar. Bessere Verfahren werden in der Theorie der Messfehler behandelt.

“Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen, wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.” (C.F. Gauss zugeschrieben)

Wenn die Ausgangsgrössen einer Rechnung eine beschränkte Genauigkeit haben, gilt das auch für das Resultat der Rechnung.

Faustregel:
Das Resultat einer Rechnung hat ebenso viele wesentliche Ziffern wie die ungenaueste Ausgangsgrösse.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1.782\,\mathrm{m}}{1.4\,\mathrm{s}} = 1.272857143\,\mathrm{m/s} \rightarrow \underline{\underline{1.3\,\mathrm{m/s}}}$$

Die Faustregel hat Ausnahmen, z.B. 1.08 km+1 mm = 1.08 km oder 3707 mm-3702 mm = 5 mm

In der Forschung wird die Genauigkeit meistens mit Hilfe der Standardabweichung (Streuung im Sinne der Normalverteilung) ausgedrückt.

Kür

Beispiel

$$5.38(3)\,\mathrm{kg} = (5.38 \pm 0.03)\,\mathrm{kg}$$

Die Zahl in der Klammer gibt den möglichen Messfehler in Einheiten der letzten angegebenen Ziffer an.

Zurück zum Formelblatt.

Diagramme

Pflicht

Diagramme (graphische Darstellungen von Messdaten oder Funktionen) sollen möglichst selbsterklärend sein: Die Achsen sind mit der Grösse, Einheit und Zahlenwerten angeschrieben, siehe Abbildung 1. Die Messdaten sind als Punkte eingetragen und als solche bezeichnet. Theoretische Kurven sind als solche beschriftet. Die Abbildungen sind nummeriert. Die Legende beschreibt, was in der Abbildung zu sehen ist. Man sollte möglichst nicht im umgebenden Text nachlesen müssen, um den Inhalt des Diagramms zu verstehen.

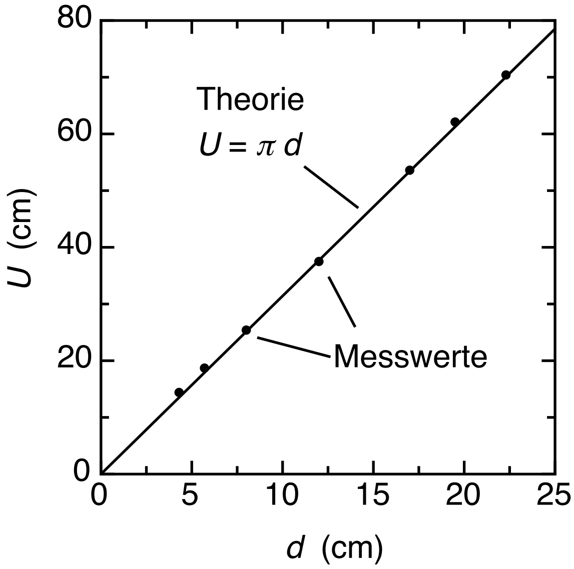


Abbildung 1: Umfang U einiger runder Küchengefässe als Funktion des Durchmessers d. Nach der Theorie erwartet man, dass der Umfang proportional zum Durchmesser wächst. Der theoretische Zusammenhang ist eine Proportionalität (im Diagramm eine Gerade durch den Nullpunkt) mit Steigung π.

Zurück zum Formelblatt.

Mittlere Geschwindigkeit

Pflicht

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$$

Die mittlere Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist gleich der Verschiebung $\Delta\vec{s}$ (während der Zeitspanne Δt) pro Zeit.

1. Beispiel: Ein Auto fährt in 35 Minuten 48 km weit.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{48 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{35 \cdot 60\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{23\,\mathrm{m/s}}}$$

2. Beispiel: Ein Bakterium befindet sich anfangs an der Position $\mathrm{P}_1(2.0\,\mu\mathrm{m}, 6.3\,\mu\mathrm{m})$ und 20 Sekunden später bei $\mathrm{P}_2(5.3\,\mu\mathrm{m}, 1.8\,\mu\mathrm{m})$. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit.

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)/\Delta t \\ (y_1 - y_1)/\Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5.3\,\mu\mathrm{m} - 2.0\,\mu\mathrm{m})/20\,\mathrm{s} \\ (1.8\,\mu\mathrm{m} - 6.3\,\mu\mathrm{m})/20\,\mathrm{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.17\,\mu\mathrm{m/s} \\ -0.23\,\mu\mathrm{m/s} \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit ist eine gerichtete Grösse, die am einfachsten als Vektor dargestellt wird. Falls die Richtung nicht bestimmt werden kann, berechnet man nur den Betrag der Geschwindigkeit (Schnelligkeit, Bahngeschwindigkeit).

Verwandte Grössen

$v = \lvert\vec{v}\rvert$	Bahngeschwindigkeit, Schnelligkeit, Weglänge pro Zeit (ohne Richtung)
$v(t)$	momentane Geschwindigkeit, enspricht der Steigung der $s(t)$-Kurve

Momentane Geschwindigkeit als Ableitung der Bahnfunktion

Kür

Wenn die Bahnfunktion $y(t)$ einer Bewegung als formaler Ausdruck bekannt ist, kann die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ mittels Differentialrechnung berechnet werden.

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$ erste Ableitung von $y(t)$ nach der Zeit t

Beispiel: Berechnen Sie die Geschwindigkeit einer harmonischen Schwingung

$$y = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega\hat{y}\cos(\omega t + \varphi_0)$$ ω kommt von der inneren Ableitung (Kettenregel)

Die Bahngleichung y(t) ist das Integral der Geschwindigkeit.

Beispiel: Sei $v(t) = v_0 - a \cdot t$ mit den Konstanten v_0 und a. Berechnen Sie die Position als Funktion der Zeit.

$$\begin{aligned} ds &= v \cdot dt \\ \int ds &= \int v \cdot dt \\ \int ds &= \int (v_0 - a \cdot t) \cdot dt \\ s &= s_0 + v_0 \cdot t - \tfrac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

Der Parameter s_0 ist eine Integrationskonstante, denn unbestimmte Integrale sind nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Zurück zum Formelblatt.

Geschwindigkeitseinheiten

Pflicht

$$1\,\mathrm{m/s} = 3.6\,\mathrm{km/h}$$

Diese Einheitenbeziehung gilt exakt, da

$$3.6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 3.6 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Beschleunigung

Pflicht

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Die *mittlere* Beschleunigung ist gleich der Geschwindigkeitsänderung pro Zeit. Da Geschwindigkeit eine gerichtete Grösse ist, umfasst die Beschleunigung sowohl Schnelligkeits- als auch Richtungsänderungen. Die Beschleunigung hat einen Betrag und eine Richtung.

Beispiel: Eine Velofahrerin bremst innert 2.8 s von 7.8 m/s bis zum Stillstand ab. Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung.

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{0\,\text{m/s} - 7.8\,\text{m/s}}{2.8\,\text{s}} = \underline{\underline{-2.8\,\text{m/s}^2}} = -2.8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Das Vorzeichen ist eine Möglichkeit, die Richtung bezüglich einer Koordinatenachse zu beschreiben. Die mit einer Richtungsänderung verbundene Beschleunigung wird Zentripetalbeschleunigung genannt.

Beschleunigung mittels Differentialrechnung

Kür

Die *momentane* Beschleunigung kann als erste Ableitung der Geschwindigkeit $v(t)$ oder zweite Ableitung der Bahnfunktion $y(t)$ berechnet werden, falls diese als formale Ausdrücke zur Verfügung stehen.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \qquad \text{momentane Beschleunigung}$$

$$a_B = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \qquad \text{Bahnbeschleunigung: Schnelligkeitsänderung pro Zeit}$$

Beispiel: Berechnen Sie die Beschleunigung einer mechanischen, harmonischen Schwingung.

$$y = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega\hat{y}\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \omega \text{ ist die innere Ableitung (Kettenregel)}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2\hat{y}\sin(\omega t + \varphi_0) \stackrel{!}{=} -\omega^2 \cdot y(t)$$

Die Beschleunigung einer harmonischen Schwingung ist proportional zur momentanen Auslenkung (in entgegengesetzter Richtung). Wenn also eine Kraft das hookesche Federgesetz $F = -ky$ erfüllt, so bewirkt diese eine harmonische Schwingung.

Zurück zum Formelblatt.

Bahngleichung der gleichmässig beschleunigten, linearen Bewegung

Pflicht

Wo befindet sich ein Punkt auf einer Koordinatenachse (s-Achse) zu einem bestimmten Zeitpunkt t, wenn er zu Beginn ($t = 0$) an der Position s_0 ist, sich dort mit Geschwindigkeit v_0 bewegt und von da an gleichmässig mit der Beschleunigung a beschleunigt? Diese Frage wird durch die *Bahngleichung* $s = s(t)$ formal beantwortet.

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Alle Grössen sind vorzeichenbehaftet. Die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit ist ein Spezialfall ($a = 0$). Aus der Bahngleichung können folgende Beziehungen hergeleitet werden:

$v = v_0 + at$	momentane Geschwindigkeit $v = v(t)$
$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$	Momentangeschwindigkeit als Fkt. des Weges $\Delta s = s - s_0$

Beispiel: Ein Geschoss wird im Lauf eines Revolvers von 165 mm Länge auf 410 m/s beschleunigt. Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung.

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \to a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(410\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 0.165\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{5.09 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s^2}}}$$

Beispiel: Ein Velo und ein Töff machen ein Wettrennen. Der Töff startet bei 0 m und beschleunigt aus dem Stand mit konstant 3.8 m/s^2. Das Velo startet fliegend bei 100 m und fährt dem Töff mit 9.7 m/s entgegen. Zu welchem Zeitpunkt treffen sie sich?

$s = \frac{1}{2}at^2$ Bahngleichung des Töffs

$s = s_V + v_V t$ Bahngleichung des Velos ($v_V < 0$)

Dieses Gleichungssystem kann nach den Treffpunktkoordinaten t (und s) aufgelöst werden

$$\tfrac{1}{2}at^2 = s_V + v_V t \Rightarrow \tfrac{1}{2}at^2 - v_V t - s_V = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_V \pm \sqrt{v_V^2 + 2as_V}}{a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-9.7\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{(-9.7\,\mathrm{m/s})^2 + 2 \cdot 3.8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 100\,\mathrm{m}}}{3.8\,\mathrm{m/s^2}} = \begin{cases} 5.1\,\mathrm{s} \leftarrow \\ -10\,\mathrm{s} \end{cases}$$

Im Raum kann die Bahngleichung vektoriell geschrieben werden. Kür

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Ist die Beschleunigung nach Betrag und Richtung konstant, so ist die Bahn eine Parabel (z.B. Wurfparabel).

Zurück zum Formelblatt.

Fallbeschleunigung

Pflicht

$$g = 9.81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

Im freien Fall im Vakuum beschleunigen alle Körper gleich. Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche ist in guter Näherung konstant und hat den oben genannten Wert. Am Nordpol ist sie leicht grösser ($9.8322\,\mathrm{m/s^2}$) und am Äquator etwas geringer ($9.7803\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$). Für spezielle Zwecke gibt es einen Normwert ($9.80665\,\mathrm{m/s^2}$).

Die Fallbeschleunigung lässt sich mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz berechnen. Die Grösse $g = F_G/m$ heisst Gravitationsfeldstärke oder ‘Ortsfaktor’.

Zurück zum Formelblatt.

Masse

Pflicht

Die Masse mit SI-Basiseinheit Kilogramm beschreibt die Trägheit eines Körpers. Trägheit ist eine Art "Widerstand gegen Beschleunigung".

Die Masse eines Körpers ist eine Eigenschaft dieses Körpers und zu unterscheiden von der Schwerkraft (Gewichtskraft), die auf ihn wirkt. Ein technischer Satellit hat auf der Erde dieselbe Masse wie in einer Umlaufbahn! In der Umlaufbahn ist der Satellit schwerelos.

Zurück zum Formelblatt.

Dichte

Pflicht

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

Die Dichte (volumenspezifische Masse) ist eine tabellierte Materialgrösse.

Beispiel: Wie viele Karat hat ein Diamant von $0.50\,\mathrm{cm}^3$ Volumen?

$$m = \rho V = 3.51 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 0.50 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 = 1.755\,\mathrm{g} \cdot \frac{1\,\mathrm{ct}}{0.2\,\mathrm{g}} = \underline{\underline{8.8\,\mathrm{ct}}}$$

Beispiel: Kies hat eine mittlere Schüttdichte von etwa $1.5{\cdot}10^3\,\mathrm{kg/m}^3$. Welches Kiesvolumen kann ein Lastwagen mit Ladekapazität 35 Tonnen laden?

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{35 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}}{1.5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^2} = \underline{\underline{23\,\mathrm{m}^3}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Dichte von Wasser

Pflicht

$$\varrho = 998\,\mathrm{kg/m^3} \text{ bei } 20\,°\mathrm{C} \text{ und Normaldruck}$$

Die Dichte von Wasser sowie anderen festen und flüssigen Stoffen hängt nur schwach von Druck und Temperatur ab.

Beispiel: Welches Volumen hat ein Mensch?

Der Mensch hat ungefähr die Dichte von Wasser. Nehmen wir eine Masse von 75 kg an, so folgt

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{75\,\mathrm{kg}}{998\,\mathrm{kg/m^3}} = \underline{\underline{75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3}}} = 75\,\mathrm{L}$$

Zurück zum Formelblatt.

Dichte von Luft

Pflicht

$$\varrho = 1.293\,\mathrm{kg/m^3} \text{ bei } 0\,°\mathrm{C} \text{ und } 101325\,\mathrm{Pa}$$

Die Dichte von Luft und anderen Gasen hängt stark von Druck und Temperatur ab. Die Werte sind üblicherweise für Normalbedingungen, siehe oben, tabelliert.

Beispiel: Welche Dichte hat Luft bei 26 °C und 0.950 bar Druck?

Mit der Zustandsgleichung des idealen Gases ($pV = nRT$) gilt:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{mp}{nRT} = \frac{Mp}{RT} \propto \frac{p}{T} \rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} \Rightarrow$$

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = 1.293\,\mathrm{kg/m^3} \cdot \frac{0.950\,\mathrm{bar} \cdot 273.15\,\mathrm{K}}{1.01325\,\mathrm{bar} \cdot (273.15 + 26)\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{1.11\,\mathrm{kg/m^3}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Inertialsystem

Kür

Inertialsysteme sind ‘unbeschleunigte Bezugssysteme’. In diesen werden die physikalischen Gesetze besonders einfach. In beschleunigten Bezugssystemen können Scheinkräfte auftreten, wie z.B. die Zentrifugalkraft oder Corioliskraft und diverse Erhaltungssätze sind verletzt (Energie, Impuls, ...).

Wie stellt man fest, ob ein Bezugssystem beschleunigt ist? Das Problem wird nur verlagert, wenn die Bewegung relativ zu einem anderen Bezugssystem gemessen wird. Eine Möglichkeit bietet das erste Newtonsche Axiom (1. Grundgesetz der Mechanik, Trägheitsprinzip) : Kräftefreie Körper bewegen sich gleichmässig entlang einer Geraden oder verharren in Ruhe. Pflicht

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem das Trägheitsprinzip gilt. Wenn ein kräftefrei aufgehängter Körper ohne sichtbaren Grund beschleunigt, ist das ein Effekt des beschleunigten Bezugssystems. Anwendung: Seismometer. Wenn das Seismometer ausschlägt, so zittert das Bezugssystem.

Verschiedene Inertialsysteme können gegen einander verschoben sein, sich relativ zu einander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen oder gegen einander verdreht sein.

Bezugssysteme können frei gewählt werden. Die Relativitätstheorien befassen sich mit den Konsequenzen dieser Freiheit.

Zurück zum Formelblatt.

Aktionsprinzip

Pflicht

Das Aktionsprinzip, auch Grundgesetz der Mechanik, Beschleunigungsprinzip oder zweites Newtonsches Axiom, zeigt, wie die Beschleunigung eines Körpers von den einwirkenden Kräften abhängt, und legt die Einheit der Kraft fest:

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a} \quad \text{oder} \qquad\qquad [F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N (Newton)}$$

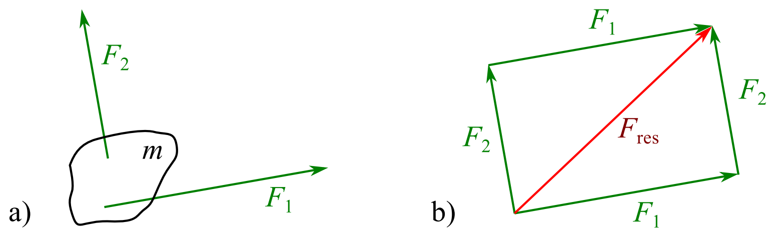
$$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\right)$$

Die auf denselben Körper wirkenden Kräfte werden paarweise mit der Parallelogrammregel zur resultierenden Kraft kombiniert. Die Beschleunigung ist jene des Massenmittelpunkts ('Schwerpunkt') des Körpers.

Beispiel: Auf einen Körper der Masse $m = 1.75\,\text{kg}$ wirken zwei Kräfte von 20 N und 30 N Stärke, die unter rechtem Winkel zu einander stehen. Berechnen Sie die Beschleunigung und zeichnen Sie die Richtung im Vergleich zu den Einzelkräften.

Zuerst werden die auf den Körper wirkenden Kräfte im Lageplan ("free body diagram") skizziert, siehe Abbildung 2(a). Die Kräfte werden durch Pfeile dargestellt, deren Länge proportional zur Stärke (Betrag) der jeweiligen Kraft ist. Im Kräfteplan, Abbildung 2(b), werden die Einzelkräfte graphisch zur resultierenden Kraft kombiniert. Die momentane Beschleunigung des Schwerpunkts des Körpers ist in derselben Richtung wie die resultierende Kraft.

Abbildung 2: Im Lageplan (a) werden die einwirkenden Kräfte möglichst massstabsgerecht am Körper eingezeichnet. Im Kräfteplan (b) werden die Kräfte mit der Parallelogrammregel zur resultierenden Kraft kombiniert.



Im Kräfteplan, Abbildung 2(b), sieht man, dass hier der Satz von Pythagoras anzuwenden ist

$$F_{\text{res}} \overset{\text{hier}}{=} \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(30\,\text{N})^2 + (20\,\text{N})^2} = \underline{\underline{36\,\text{N}}}$$

$$a = \frac{F_{\text{res}}}{m} = \frac{36.0555\,\text{N}}{1.75\,\text{kg}} = \underline{\underline{21\,\text{m/s}^2}}$$

Wenn das Bezugssystem, in dem die Beschleunigung gemessen wird, selbst beschleunigt ist, kann das *Scheinkräfte* wie die Zentrifugal- oder Corioliskraft vortäuschen. Man beschränkt sich mit Vorteil auf Inertialsysteme ('unbeschleunigte Bezugssysteme').

Das Aktionsprinzip führt im allgemeinen auf eine Differentialgleichung, die sog. Bewegungsgleichung. Kür

$$a_x = \tfrac{1}{m} F_{\text{res, x}} \rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{m} \sum_i F_{x,i}$$

Die Statik (Lehre vom Kräftegleichgewicht) ist ein Spezialfall von $F_{\text{res}} = ma$: Wenn ein Körper (respektive dessen Massenmittelpunkt) im Gleichgewicht ist, verschwindet die resultierende Kraft. Wenn die resultierende Kraft auf einen Körper verschwindet, so verharrt dessen Schwerpunkt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Geraden. Pflicht

Zurück zum Formelblatt.

Reaktionsprinzip

Pflicht

Das Reaktionsprinzip wird auch drittes Newtonsches Axiom oder Wechselwirkungsprinzip genannt.

Im Rahmen der newtonschen Mechanik werden Kräfte von Körpern ausgeübt und wirken auf Körper ein. Während ein Körper eine Kraft ausübt (actio) erfährt er gleichzeitig eine Rückwirkung (reactio, Reaktionskraft, Rückstosskraft) von gleicher Stärke aber umgekehrter Richtung. Kräfte treten also stets paarweise auf. Man nennt sie deshalb auch Wechselwirkungen.

actio = reactio

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Beispiel: Ein Lastwagen (40 t) und ein Personenwagen (1.3 t) stossen frontal zusammen. In welchem Verhältnis stehen die Kräfte?

Die Kräfte sind wegen des Reaktionsprinzips genau gleich gross. Da diese zwei Kräfte aber auf verschiedene Körper wirken, sind die Effekte (Beschleunigungen von LKW und PW) natürlich auch unterschiedlich.

Das Reaktionsprinzip ist im Rahmen der Newtonschen Mechanik äquivalent zum Impulserhaltungssatz. In der modernen Physik ist der Impulserhaltungssatz grundlegender, denn das Newtonsche Reaktionsprinzip hat Ausnahmen: Wenn beispielsweise die Sonne etwas wackelt, so merkt das die Erde erst acht Minuten später, weil keine Information schneller als das Licht sein kann.

Zurück zum Formelblatt.

Gewichtskraft

Pflicht

Die Schwerkraft oder Gewichtskraft ist

$$\vec{F}_G = m\vec{g}$$

m ist die Masse des betrachteten Körpers und $\vec{g}$ die Fallbeschleunigung, Gravitationsfeldstärke oder der Ortsfaktor an der Stelle, wo sich dieser Körper befindet. Die Fallbeschleunigung ist tabelliert (oder kann mit Hilfe des Newtonschen Gravitationsgesetzes berechnet werden).

Beispiel: Der Mars-Rover 'Curiosity' hat eine Masse von 900 kg. Berechnen Sie sein Gewicht auf dem Mars.

$$F_G = mg_M = 900\,\mathrm{kg} \cdot 3.7\,\mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{3.3\,\mathrm{kN}}}$$

Die Gravitationskraft wirkt im Prinzip auf jedes Massenelement eines starren Körper einzeln. Diese Teilkräfte können zur Gewichtskraft zusammengefasst werden, die im *Gravizentrum* (Schwerpunkt) angreift. Die Lage des Schwerpunkts hängt von der Massenverteilung des Körpers sowie dem Gravitationsfeld ab. In einem homogenen Schwerefeld stimmt das Gravizentrum mit dem Massenmittelpunkt überein.

Zurück zum Formelblatt.

Federkraft

Pflicht

Viele Federn erfüllen das Hookesche Federgesetz: Die Verlängerung der Feder ist proportional zur Kraft.

$$F_F = D \cdot y \quad \text{oder} \quad F_F = -ky$$

Das Gesetz gilt, solange die Feder nicht überdehnt wird. In der Variante ohne Vorzeichen sind die Beträge gemeint, in der Variante mit Vorzeichen wird ausgedrückt, dass die Feder stets zur Gleichgewichtslage zurück zieht oder drückt. Die Auslenkung y wird von der Gleichgewichtslage aus gemessen. Die Grösse D oder k heisst Federkonstante (Direktionsgrösse, Richtgrösse).

Beispiel: Ein Körper von 400 g Masse wird an eine Feder gehängt. Im Gleichgewicht verlängert sich diese Feder dadurch um 12.3 cm. Berechnen Sie die Federkonstante.

$$F_{\mathrm{res}} = 0 \rightarrow F_F - F_G = 0 \rightarrow Dy = mg \Rightarrow$$
$$D = \frac{mg}{y} = \frac{0.400\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}{0.123\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{31.9\,\mathrm{N/m}}}$$

Beispiel: Eine hookesche Feder wird von 2.8 cm auf 4.1 cm gedehnt. Um welchen Faktor verändert sich die Federkraft?

Das hookesche Federgesetz ist eine direkte Proportionalität:

$$\left.\begin{array}{r} F \propto y \\ F \sim y \\ F/y = const \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{4.1\,\mathrm{cm}}{2.8\,\mathrm{cm}} = 1.464 = \underline{\underline{1.5}}$$

Die Federkraft nimmt 46 % zu.

Jede Feder hat ihre eigene Federkonstante. Die Federkonstante hängt vom Material und der Form der Feder ab. Es gibt auch Federn, die das Hookesche Gesetz nicht erfüllen.

Zurück zum Formelblatt.

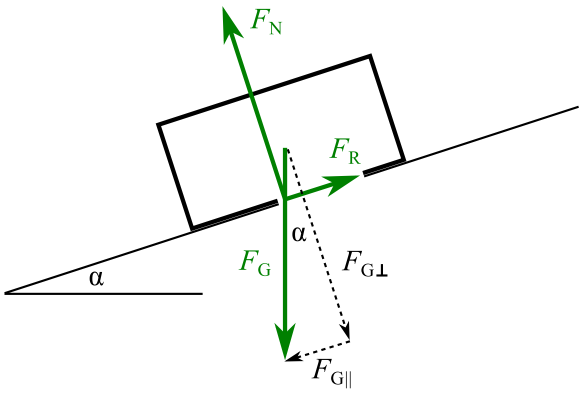
Normalkraft

Pflicht

Wenn sich die Oberflächen zweier Körper berühren, so üben sie Kräfte auf einander aus. Die Berührungskraft auf einen der Körper wird üblicherweise in zwei Komponenten aufgeteilt: Eine Komponente senkrecht zur Oberfläche (Normalkraft) und eine parallel zur Oberfläche (Reibungskraft).

Beispiel: Eine Kiste der Masse 45 kg liegt ruhig auf einer ebenen Rampe, die 18° gegen die Horizontale geneigt ist. Berechnen Sie die Normal- und Reibungskraft.

Abbildung 3: Auf die Kiste, die auf der schiefen Ebene steht, wirken die Gewichtskraft (F_G) der Erde sowie die Normalkraft (F_N) und Reibungskraft (F_R) der Rampe. Die Komponenten der Gewichtskraft senkrecht ($F_{G\perp}$) und parallel ($F_{G\parallel}$) zur Ebene sind ebenfalls eingezeichnet.



Die Normalkraft kompensiert die senkrechte Komponente der Gewichtskraft, sonst würde die Kiste in der Ebene einsinken. Die Reibungskraft kompensiert die parallele Komponente der Gewichtskraft, sonst würde die Kiste beschleunigt abwärts rutschen. Also gilt für die Beträge

$$F_N = F_{G\perp} = F_G \cos\alpha = mg\cos\alpha = 45\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \cos 18° = \underline{\underline{0.42\,\mathrm{kN}}}$$

$$F_R = F_{G\parallel} = F_G \sin\alpha = mg\sin\alpha = 45\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \sin 18° = \underline{\underline{0.14\,\mathrm{kN}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Gleitreibungskraft

Pflicht

Gleiten die Oberflächen zweier trockener Körper an einander vorbei, so gilt das Gleitreibungsgesetz nach Coulomb oder Amontons: Die Reibungskraft ist proportional zur Normalkraft (Anpresskraft).

$$F_{\mathrm{GR}} = \mu_G F_N$$

Die Gleitreibungszahl μ_G (der Gleitreibungskoeffizient) hängt von der Materialkombination ab. Die Kraft, mit welcher der betrachtete Körper senkrecht gegen die Oberfläche gedrückt wird, ist gleich gross wie die Normalkraft F_N der Oberfläche auf diesen Körper (sonst würde der Körper in die Oberfläche einbrechen). Die makroskopische Gleitreibungskraft ist unabhängig von der Flächengrösse und unabhängig von der Geschwindigkeit. Die Gleitreibungszahlen sind für verschiedene Materialkombinationen tabelliert.

Beispiel: Der Gleitreibungskoeffizient für Stahl auf Eis betrage 0.014 (wikipedia). Wie lange dauert es, bis ein Schlittschuhläufer mit Anfangsgeschwindigkeit 3.8 m/s stille steht?

$$F_{\mathrm{res}} = ma \rightarrow F_{\mathrm{GR}} = ma \rightarrow \mu_G F_N = ma \rightarrow \mu_G mg = m\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow$$
$$\Delta t = \frac{\Delta v}{\mu_G g} = \frac{3.8\,\mathrm{m/s}}{0.014 \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{\underline{28\,\mathrm{s}}}$$

Die Gleitreibungszahlen sind meist nicht sehr genau bestimmt und deshalb nur als Richtwerte zu betrachten.

Zurück zum Formelblatt.

Haftreibungskraft

Pflicht

$0 \leqslant F_{\text{HR}} \leqslant \mu_H F_N$

Das Haftreibungsgesetz hat zwei Aspekte:
1. Die Haftreibungskraft kompensiert die Zugkraft, solange die maximale Haftreibungskraft nicht überschritten wird.
2. Die maximale Haftreibungskraft ist proportional zur Normalkraft (Anpresskraft).

Die Haftreibungszahl μ_H (der Haftreibungskoeffizient) hängt von der Materialkombination sowie der Zeit, während der die Oberflächen gegen einander gepresst wurden, ab. Richtwerte sind tabelliert.

Beispiel: Ein Auto (1.4 t) ist auf einer Strasse mit 5.3° Neigung abgestellt. Berechnen Sie die Haftreibungskraft auf das Auto.

Die Haftreibung muss die Komponente des Gewichts parallel zur Ebene kompensieren:
$F_{\text{HR}} = F_{\text{G}\,\|} = mg \sin\alpha = 1.4 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 5.3° = \underline{\underline{1.3\,\text{kN}}}$

Beispiel: Ein Holzbrettchen liegt lose auf einer geneigten Holzplanke. Bei welchem Neigungswinkel beginnt das Brettchen zu rutschen?

Grenzlage: $\mu_H F_N = F_{\text{G}\,\|} \to \mu_H F_{G\perp} = F_{G\|} \to \mu_H mg\cos\alpha = mg\sin\alpha \Rightarrow \mu_H = \tan\alpha \Rightarrow$
$\alpha = \arctan\mu_H \approx \arctan 0.4 \approx 22°$

Zurück zum Formelblatt.

Arbeit

Pflicht

Arbeit ist definiert als Kraftkomponente in Wegrichtung $F_{||}$ mal Weg s.

$$W = F_{||} \cdot s$$

Wenn α der Winkel zwischen Kraft- und Wegrichtung ist, so kann man auch $W = F s \cos\alpha$ schreiben.
Die zusammengesetzte SI-Einheit der Arbeit ist das Joule (Symbol J): $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Beispiel: Ein Auto erfahre eine Luftwiderstandskraft von 300 N und bewege sich 2.5 km weit. Wie viel Arbeit verrichtet der Luftwiderstand?

$$W = F_s s = 300\,\mathrm{N} \cdot 2.5 \cdot 10^3\,\mathrm{m} = \underline{\underline{7.5 \cdot 10^3\,\mathrm{J}}}$$

Beispiel: Ein Fass von 31 kg Masse rollt eine 4 m lange Rampe, die 12° gegen die Horizontale geneigt ist, hinab. Wie gross ist die Arbeit, welche die Gewichtskraft am Fass verrichtet?

Nur die Komponente $F_{G||}$ der Gewichtskraft parallel zur Ebene verrichtet Arbeit:

$$W = F_s s = F_{G||} \cdot s = mg \sin\alpha \cdot s = 31\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot \sin 12° \cdot 4\,\mathrm{m} = 253\,\mathrm{J} = \underline{\underline{0.3\,\mathrm{kJ}}}$$

Bemerkung

Kür

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$	Schreibweise mit Skalarprodukt
$W = \int_A^B F_{\parallel} ds$	Erweiterung auf krumme Wege oder variable Kraft

Zurück zum Formelblatt.

Energie

Pflicht

"Energie ist gespeicherte Arbeit."
Genauer: Die Energie E_2 nachher ist die Summe aus der Energie E_1 vorher, der Arbeit W, die an dem System verrichtet wurde, sowie weiteren Energieänderungen.

$$E_2 = E_1 + W + \ldots$$

Beispiel: Ein Curlingstein (19 kg) wird mit 8.3 N auf einer Strecke von 1.2 m angeschoben. Wie viel nimmt seine Energie zu?

$$E_2 - E_1 = W = Fs = 8.3\,\mathrm{N} \cdot 1.2\,\mathrm{m} = \underline{\underline{10\,\mathrm{J}}}$$

Die Beziehung $\Delta E = W + \ldots$ ist verwandt mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik.

Zurück zum Formelblatt.

Kinetische Energie

Pflicht

Kinetische Energie ist Bewegungsenergie.

$$E_k = \tfrac{1}{2} m v^2$$

Genauer: Gemeint ist hier die *Translationsenergie* des Massenmittelpunkts, d.h. ohne Rotationsenergie. Die kinetische Energie hängt vom gewählten Bezugssystem ab.

Beispiel: Ein Geschoss hat 4.0 g Masse und kinetische Energie 1700 J. Wie schnell bewegt es sich?

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1700\,\mathrm{m/s}}{4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}} = \underline{\underline{0.92\,\mathrm{km/s}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Potentielle Energie

Pflicht

Potentielle Energie ist Lageenergie.

$$E_p = mgh$$

Der Nullpunkt der potenziellen Energie ist frei wählbar (aber nur ein Mal).
Genauer: Gemeint ist hier die Lageenergie eines Körpers im homogenen Schwerefeld nahe der Erdoberfläche.

Beispiel: Der Lac des Dix enthält 401 Millionen Tonnen Wasser und befindet sich etwa 1.8 km über dem Turbinenhaus. Wie gross ist seine potentielle Energie?

Wir wählen den Nullpunkt der potenziellen Energie beim Turbinenhaus.

$$E_p = mgh = 401 \cdot 10^9\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1.8 \cdot 10^3\,\mathrm{m} = \underline{\underline{7.1 \cdot 10^{15}\,\mathrm{J}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Spannungsenergie einer Feder

Pflicht

Eine gespannte Feder, die das Hookesche Federgesetz erfüllt, enthält die Energie

$$E_F = \tfrac{1}{2} D y^2$$

Beispiel: Eine Feder mit Federkonstante 100 N/m hat 2.8 J Spannungsenergie gespeichert. Berechnen Sie die Verlängerung y der Feder.

$$y = \pm\sqrt{\frac{2E_F}{D}} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 2.8\,\mathrm{J}}{100\,\mathrm{N/m}}} = \underline{\underline{\pm 24\,\mathrm{cm}}}$$

Energie kann sowohl in gedehnten als auch in gestauchten Federn gespeichert werden.

Zurück zum Formelblatt.

Energieerhaltungssatz

Pflicht

Die Gesamtenergie in einem abgeschlossenen System ist erhalten. Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden. Ändern kann sich nur die Verteilung auf die verschiedenen Energieformen.

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + \cdots = \text{const}$$

In der Mechanik ist ein System abgeschlossen, wenn keine Kräfte von aussen auf das System einwirken und keine Teilchen ein- oder austreten. Allgemein ist ein System abgeschlossen, wenn keine Energie hinein oder hinaus fliesst. Hinter den Punkten ($+\ldots$) verbirgt sich zum Beispiel die innere Energie U eines Körpers (chemische Energie, Kernenergie, "Wärmeenergie", usw.). Es werden nur jene Energieformen aufgeführt, welche sich im betrachteten Prozess ändern.

Beispiel: Ein Wasserstrahl tritt mit 3.7 m/s horizontal aus einer Brunnenröhre. Mit welcher Schnelligkeit trifft er 78 cm weiter unten auf den Wasserspiegel im Brunnentrog?

$$E_{k2} + E_{p2} + U_2 = E_{k1} + E_{p1} + U_1$$

$$U_2 = U_1 \qquad \text{Wahl: } E_{p2} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgh$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh} = \sqrt{(3.7\,\text{m/s})^2 + 2 \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 0.78\,\text{m}} = \underline{\underline{5.4\,\text{m/s}}}$$

Falls das betrachtete System nicht abgeschlossen ist, muss einfach berücksichtigt werden, wie viel Energie das System betritt oder verlässt, siehe auch den ersten Hauptsatz der Thermodynamik.

Zurück zum Formelblatt.

Leistung

Pflicht

Die Leistung ist definiert als Arbeit pro Zeit oder als Energieübertrag pro Zeit.

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Die SI-Einheit der Leistung ist das Watt (gleich Joule pro Sekunde).

Beispiel: Eine Kochplatte hat nominell die Leistung 1.6 kW. Wie viel Energie gibt sie in einer Minute ab?

$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 1.6 \cdot 10^3\,\mathrm{W} \cdot 60\,\mathrm{s} = \underline{\underline{96\,\mathrm{kJ}}}$$

Beispiel: Die Luftwiderstandskraft ist proportional zum Quadrat der Schnelligkeit ($F_W \propto v^2$). Wie verändert sich die Leistung, wenn sich die Schnelligkeit um 10 % erhöht?

Kür

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F_{\|}\Delta s}{\Delta t} = F_{\|} \cdot v$$
$$P_W = F_w v \propto v^2 \cdot v$$
$$P_W \propto v^3 \Rightarrow$$
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{v_2^3}{v_1^3} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 = \left(\frac{110\,\%}{100\,\%}\right)^3 = 1.10^3 = 1.33$$

Die Leistung, um den Luftwiderstand zu kompensieren, nimmt 33 % zu.

Zurück zum Formelblatt.

Wirkungsgrad

Kür

Der Wirkungsgrad einer Maschine ist das Verhältnis von verrichteter Arbeit zu aufgenommener Energie (oder von genutzter zu aufgenommener Energie).

$$\eta = \frac{W_2}{W_1}$$

Der Energiesatz fordert, dass der Wirkungsgrad zwischen 0 und 100 % liegt.

Beispiel: Ein Elektromotor nimmt 6.8 J elektrische Energie auf und hebt damit eine Last von 300 g um 1.5 m an. Berechnen Sie den Wirkungsgrad.

$$\eta = \frac{\Delta E_2}{\Delta E_1} = \frac{mgh}{\Delta E_1} = \frac{0.300\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1.5\,\mathrm{m}}{6.8\,\mathrm{J}} = \underline{\underline{0.65}} \cdot 100\,\% = 65\,\%$$

Beispiel: Das Etzelwerk des Sihlsees hat eine maximale, elektrische Leistung von 140.22 MW (Bahnstrom). Den Turbinen wird maximal 34.62 $\mathrm{m^3/s}$ Wasser bei einer mittleren Fallhöhe von 483.3 m zugeführt. Berechnen Sie den Wirkungsgrad.

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_2 \cdot \Delta t}{\Delta t \cdot W_1} = \frac{P_2}{P_1} \\
&= \frac{P_2}{mgh/\Delta t} = \frac{P_2}{\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} g h} = \\
&= \frac{140.22 \cdot 10^6\,\mathrm{W}}{998\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 34.62\,\mathrm{m^3/s} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 483.3\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{0.856}}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Es gibt verschiedene Sorten von Wirkungsgraden. Der hier vorgestellte Wirkungsgrad ist der geläufigste. Für den thermodynamischen Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine gilt ein spezielles Gesetz (zweiter Hauptsatz der Wärmelehre).

Zurück zum Formelblatt.

Kilowattstunde

Pflicht

Die Kilowattstunde (kWh) ist eine gängige Energieeinheit (nicht SI):

$$1\,\mathrm{kWh} = 3.6\,\mathrm{MJ} = 3.6 \cdot 10^6\,\mathrm{J} \qquad \text{(exakt)}$$

Beispiel: Der Energieverbrauch 2018 der Schweiz betrug 831 PJ. Die Schweiz hatte damals 8.54 Millionen Einwohner. Berechnen Sie den Verbrauch pro Kopf in Kilowattstunden.

$$\frac{\Delta E}{\Delta N} = \frac{831 \cdot 10^{15}\,\mathrm{J}}{8.54 \cdot 10^6 \cdot 3.6 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kWh}} = 27\,030\,\mathrm{kWh} \quad \text{zwei bis drei signifikante Stellen}$$

Die Einheit Joule muss sich bei der Umwandlung kürzen lassen und die Einheit kWh muss übrig bleiben.

Zurück zum Formelblatt.

Impuls

Kür

Die Grösse Impuls kann umgangssprachlich als “Schwung” bezeichnet werden. Für kleine Geschwindigkeiten ist sie proportional zur Masse des Körpers und proportional zur (gerichteten!) Geschwindigkeit.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad\qquad [p] = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$$

Der Impuls ist eine Erhaltungsgrösse und ermöglicht eine alternative Formulierung des zweiten newtonschen Axioms.

Der Gesamtimpuls eines ausgedehnten Körpers oder mehrerer Massenpunkte ist die vektorielle Summe der Teilimpulse. Er ist gleich der Gesamtmasse multipliziert mit der Geschwindigkeit des *Massenmittelpunkts* (‘Schwerpunkts’).

Der gemeinsame Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) zweier Körper teilt die Verbindungslinie der Körperschwerpunkte im umgekehrten Verhältnis der Massen: Pflicht

$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

x_S, x_1, x_2: Koordinaten der betreffenden Objekte

Für hohe Geschwindigkeiten muss das relativistische Impulsgesetz verwendet werden: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$.
Für Licht gilt $p = E/c$. Kür

Zurück zum Formelblatt.

Impulserhaltungssatz

Kür

In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls erhalten.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

Ein abgeschlossenes System besteht aus $n \geqslant 1$ Körpern oder Massenpunkten, auf die von aussen keine Kräfte ausgeübt werden. Untereinander dürfen sie Kräfte ausüben.

Da der Gesamtimpuls gleich dem Produkt aus Gesamtmasse und Geschwindigkeit des Schwerpunkts ist, muss sich der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems gleichmässig auf einer Geraden bewegen (*Schwerpunktsatz*).

Beispiel: Wilhelm Tell schiesst einen Pfeil (35 g, 40 m/s) auf einen Apfel (260 g, ruhend). Nehmen wir an, dass der Pfeil stecken bleibt (was nicht realistisch ist) und zusammen mit dem Apfel weiter fliegt. Welche Geschwindigkeit hat dann der Apfel?

$$m_1 v_1 + m_2 \cdot 0 = m_1 v_2 + m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{35\,\text{g} \cdot 40\,\text{m/s}}{35\,\text{g} + 260\,\text{g}} = \underline{\underline{4.7\,\text{m/s}}}$$

Bei einem vollkommen unelastischen Stoss (siehe vorangehendes Beispiel), bewegen sich die Stosskörper nach dem Zusammenprall mit gleicher Geschwindigkeit weiter. Bei einem vollkommen elastischen Stoss ist die kinetische Energie vor und nach dem Stoss gleich.

Zurück zum Formelblatt.

Grundgesetz der Mechanik

Kür

In einem Inertialsystem wird der Impuls eines Körpers durch Kräfte verändert:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Die Formulierung $F = \Delta p/\Delta t$ ist im Rahmen der newtonschen Mechanik gleichwertig zu $F = ma$.

Beispiel: Ein Auto von 1.34 Tonnen Masse beschleunige in 3.4 s von Null auf 30 m/s. Wie gross ist die beschleunigende Kraft?

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{\Delta t} = \frac{mv_2 - 0}{\Delta t} = \frac{1.34 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 30\,\text{m/s}}{3.4\,\text{s}} = \underline{\underline{1.2 \cdot 10^4\,\text{N} \cdot \text{s}}}$$

Bemerkung
Der Impuls eines offenen Systems kann sich auch ändern, wenn Strahlung oder Materie ein- oder austritt.

Beispiel: Der Impuls einer Rakete ändert sich nicht, weil Kräfte von aussen einwirken (Schwerelosigkeit!), sondern weil Gase die Rakete durch die Düse verlassen.

$$\begin{aligned}
d\vec{p}_{\text{Rakete}} &= \vec{F}_{\text{res}} \cdot dt - dm_{\text{Gas}} \cdot v_{\text{Gas}} \\
m_R \cdot dv_R &= 0 - dm_G \cdot \vec{v}_G \\
m_R \cdot \frac{d\vec{v}_R}{dt} &= -\frac{dm_G}{dt} \cdot \vec{v}_G \\
m_R \vec{a}_R &= -\frac{dm_G}{dt} \cdot \vec{v}_G \qquad \text{“Schubkraft”}
\end{aligned}$$

Zurück zum Formelblatt.

Winkelgeschwindigkeit

Pflicht

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \frac{v}{r}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω (Omega) wird benötigt, um Dreh- und Kreisbewegungen (Abbildung 4) zu charakterisieren. Sie hängt mit der *Umlaufzeit* T und der *Frequenz* f zusammen. Da die harmonische Schwingung als Komponente einer Kreisbewegung eingeführt werden kann, tritt sie dort ebenfalls auf, aber unter dem Namen Kreisfrequenz.

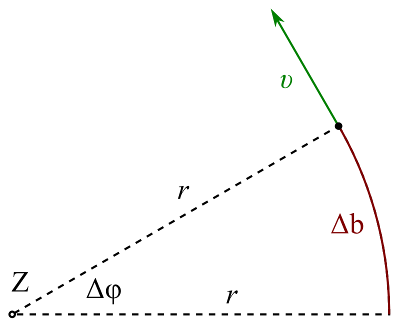


Abbildung 4: Ein Punkt bewege sich mit konstanter Bahngeschwindigkeit v (Schnelligkeit) auf einem Kreis mit Radius r um ein Zentrum Z. In gleichen Zeiten Δt werden gleiche Winkel $\Delta\varphi$ respektive gleiche Bogenlängen Δb überstrichen.

Das Bogenmass des Winkels $\Delta\varphi$ ist das Verhältnis von Bogenlänge Δb zu Radius r:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta b}{r} \qquad [\Delta\varphi] = \text{rad} \quad \text{Hilfseinheit Radiant}$$

Die *Winkelgeschwindigkeit* ω ist definiert als überstrichener Winkel $\Delta\varphi$ pro Zeit Δt:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \text{s}^{-1}$$

$$v = \frac{\Delta b}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi \cdot r}{\Delta t} = \omega \cdot r \qquad \text{Bahngeschwindigkeit, Schnelligkeit}$$

Die *Umlaufzeit* (Periodendauer) T ist die Zeit, die für einen vollständigen Kreisumlauf benötigt wird: $\Delta\varphi = 2\pi \Rightarrow \omega = 2\pi/T$. Bei der harmonischen Schwingung wird T Perioden- oder Schwingungsdauer genannt.

Die *Frequenz* f ist die Anzahl Umläufe pro Zeit (Anzahl Schwingungen oder Perioden pro Zeit). Die Frequenz ist der Kehrwert der Umlaufzeit: $f = 1/T$. Die Frequenz wird in der Einheit Hertz (Hz) angegeben, um Verwechslungen mit der Winkelgeschwindigkeit zu vermeiden.

Beispiel: Der Sekundenzeiger meiner Armbanduhr ist 4.0 mm lang. Berechnen Sie seine mittlere Winkelgeschwindigkeit, die Drehfrequenz und die Bahngeschwindigkeit der Zeigerspitze. Die Uhr gehe weniger als eine Sekunde pro Tag falsch.

$$T = 60.000\,\text{s} = \frac{86400\,\text{s}}{24 \cdot 60} \quad \text{ca. fünf signifikante Stellen}$$

$$f = \frac{1}{T} = 1.0000\,\text{min}^{-1} = \frac{1}{60.000\,\text{s}} = 16.667\,\text{mHz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60.000\,\text{s}} = 0.10472\,\text{rad/s}$$

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 4.0 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{60\,\text{s}} = 4.2 \cdot 10^{-4}\,\text{m/s}$$

Zurück zum Formelblatt.

Zentripetalbeschleunigung

Pflicht

$$a_z = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

Wenn sich ein Punkt gleichmässig mit Bahngeschwindigkeit (Schnelligkeit) v oder Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit Radius r bewegt, so ist er mit a_z beschleunigt, weil er ständig seine Bewegungsrichtung ändert. Der Beschleunigungsvektor ist vom betrachteten Punkt auf der Kreislinie zum Kreiszentrum gerichtet. Die Zentripetalbeschleunigung wird auch Radial-, Transversal-, Normal- oder Querbeschleunigung genannt.

Bei einer ungleichmässigen Kreisbewegung hat der Beschleunigungsvektor zusätzlich noch eine Komponente parallel zur momentanten Bewegungsrichtung (Tangential-, Longitudinal-, Bahn- oder Längsbeschleunigung $a_t = \Delta|v|/\Delta t$).

Die Zentripetalbeschleunigung verändert nur die Richtung des Geschwindigkeitsvektors, die Bahnbeschleunigung beeinflusst nur den Betrag der Geschwindigkeit.

Bewegt sich der Schwerpunkt eines Körpers auf einem Kreis, so gilt

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_z + m\vec{a}_t \qquad\qquad \vec{a}_z \perp \vec{a}_t$$

Die zentripetale Komponente der resultierenden Kraft wird auch Zentripetalkraft genannt.

Beispiel: Ein Rad hat Radius 30 cm. Es rollt mit 17 m/s über eine Strasse. Welche Beschleunigung erfährt ein Stück des Radumfangs?

$$a_z = \frac{v^2}{r} = \frac{(17\,\text{m/s})^2}{0.30\,\text{m}} = \underline{\underline{9.6 \cdot 10^2\,\text{m/s}^2}}$$

Beispiel: Ein Fadenpendel rotiert auf einem vertikalen Kreis. Der Faden hat eine Länge von 65 cm, der Pendelkörper hat 71 g Masse und eine Bahngeschwindigkeit von 8.3 m/s im tiefsten Punkt. Mit welcher Kraft zieht der Faden im tiefsten Punkt den Pendelkörper nach oben?

Im tiefsten Punkt wird das Pendel momentan weder schneller noch langsamer, d.h. die Bahnbeschleunigung verschwindet in diesem Moment.

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_z + m\vec{a}_t \overset{\text{hier}}{=} m\vec{a}_z$$
$$F_{\text{res}} = ma_z$$
$$F_F - mg = m\frac{v^2}{r}$$
$$F_F = \frac{mv^2}{r} + mg = \frac{0.071\,\text{kg} \cdot (8.3\,\text{m/s})^2}{0.65\,\text{m}} + 0.071\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 = \underline{\underline{8.2\,\text{N}}}$$

Bemerkung: Die *Zentrifugalbeschleunigung* tritt nur in einem rotierenden Bezugssystem auf und hat den Wert $a_{\text{ZF}} = R\Omega^2$, wobei R der Abstand des Körpers von der Drehachse und Ω die Winkelgeschwindigkeit des Bezugssystems (relativ zu einem Inertialsystem) ist. Kür

Zurück zum Formelblatt.

Newtonsches Gravitationsgesetz

Pflicht

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{Gravitationskraft}$$

$$G = 6.67430(15) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \qquad \text{Gravitationskonstante}$$

Zwei kugelsymmetrische Körper mit Massen m_1 und m_2 sowie Mittelpunktsabstand r ziehen sich mit der Gravitationskraft F_G an. Die Gravitationskonstante G ist unabhängig vom Material und hat überall im Universum denselben Wert.

Beispiel: Berechnen Sie die Fallbeschleunigung auf dem Mars aus dessen Masse und Radius.

$$F_{\text{res}} = ma \rightarrow \frac{GMm}{r^2} = mg \Rightarrow$$

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \cdot 0.642 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(3.40 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2} = \underline{\underline{3.71\,\mathrm{m/s^2}}}$$

Die Grösse $\vec{g} = \vec{F}_G/m$ heisst *Gravitationsfeldstärke* (Gravitationskraft auf eine Probemasse pro Masse).

Beispiel: Der Mond Miranda hat Bahnradius 129 872 km und Umlaufzeit 1.4135 d. Berechnen Sie die Masse des Planeten. Welcher Planet ist es?

$$F_{\text{res}} = ma_z \rightarrow \frac{Gm_P m_M}{r^2} = m_M r\omega^2 = m_M r \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\frac{Gm_P}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T^2} \qquad \text{3. Keplersches Gesetz (ergänzte Fassung)}$$

$$m_P = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6.67430 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}} \cdot \frac{(129.872 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^3}{(1.4135 \cdot 86400\,\mathrm{s})^2} = \underline{\underline{8.6872 \cdot 10^{25}\,\mathrm{kg}}}$$

Nach wikipedia gehört die Masse $86.81 \cdot 10^{24}$ kg zu Uranus.

Das Newton'sche Gravitationsgesetz wurde aus den älteren, *Kepler'schen Gesetzen* hergeleitet: Kür

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Die Verbindungslinie Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen der Ellipsenbahnen: $T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$

Zurück zum Formelblatt.

Drehmoment

Kür

Das Drehmoment ist eine Art “Drehwirkung”. Es wird beispielsweise benötigt, um zu beschreiben, wie stark eine Schraube angezogen werden soll. Das Drehmoment taucht im Hebelgesetz auf.

$$M = aF = rF\sin\alpha$$

Das Drehmoment einer Kraft bezüglich einer Drehachse ist Produkt aus der Kraft F und ihrem Hebelarm a. Der Hebelarm ist der Abstand der Drehachse von der Wirkungslinie der Kraft, siehe Abbildung 5.

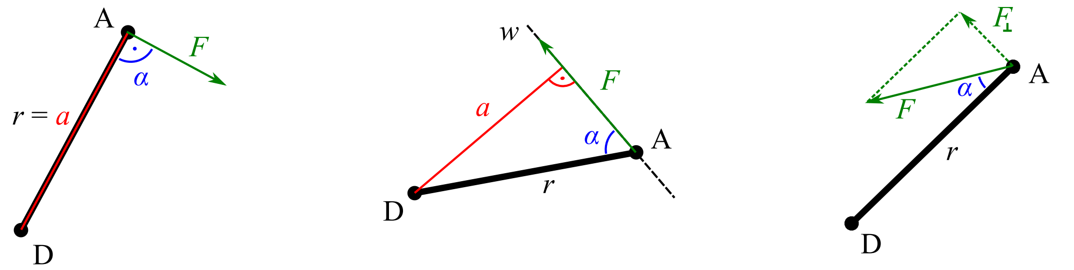


Abbildung 5: Das Drehmoment ist das Produkt aus Kraft F und Hebelarm a. Sei r der Abstand vom Angriffspunkt A der Kraft bis zur Drehachse D. Die Drehachse steht in allen drei Bildern senkrecht zur Zeichenebene.
Linkes Bild: Falls die Kraft senkrecht zu r angreift, ist $r = a$.
Mittleres Bild: Falls die Kraft unter einem Winkel $\alpha \neq 90°$ zu r angreift, so ist der Hebelarm a der Abstand von der Drehachse D zur Wirkungslinie w der Kraft: $a = r\sin\alpha$. Die Wirkungslinie hat die Richtung der Kraft und geht durch den Angriffspunkt A der Kraft.
Rechtes Bild: Das Drehmoment kann auch beschrieben werden als Abstand r multipliziert mit der Komponente $F_\perp = F\sin\alpha$ der Kraft senkrecht zu r.

Beispiel: Die Mechanikerin zieht mit 50 N an einem 30 cm langen Schraubenschlüssel (senkrecht zum Schaubenschlüssel). Berechnen Sie das Drehmoment, mit der die Schraube angezogen wird.

$$M = aF = 0.30\,\mathrm{m} \cdot 50\,\mathrm{N} = 15\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} \quad \text{Einheit: Newtonmeter}$$

Das Drehmoment ist eine gerichtete Grösse: In der Abbildung 5 genügt dazu ein Vorzeichen: Das Drehmoment ist positiv, wenn die Kraft eine Drehbewegung im mathematisch positiven Drehsinn erzeugt (Gegenuhrzeigersinn). Kür

Im Raum hat der Drehmomentvektor die Richtung der Drehachse und wird meist mittels eines Vektorprodukts berechnet:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Zurück zum Formelblatt.

Hebelgesetz

Pflicht

$$a_1 F_1 = a_2 F_2$$

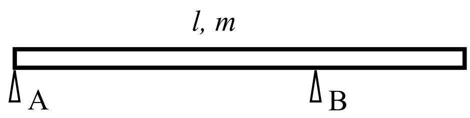
Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der einwirkenden Kräfte und die Summe der Drehmomente verschwinden. Ein Hebel ist ein starrer Körper, d.h. ein ausgedehntes Objekt mit Masse (Trägheit), das seine Form unter Krafteinfluss nicht ändert.

Beispiel: Der Papi (72 kg) setzt sich mit dem Sohn (18 kg) auf die Wippe. Der Sohn sitzt 3.5 m von der Drehachse entfernt. Wo muss sich Papi hinsetzen, damit die Wippe im Gleichgewicht ist ohne an einem Ende aufzuliegen?

$$a_1 F_1 = a_2 F_2 \rightarrow a_1 m_1 g = a_2 m_2 g \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot \frac{m_1}{m_2} = 3.5\,\mathrm{m} \cdot \frac{18\,\mathrm{kg}}{72\,\mathrm{kg}} = \underline{\underline{0.88\,\mathrm{m}}}$$

Beispiel: Siehe Abbildung 6.

Abbildung 6: Ein Balken der Masse $m = 18\,\mathrm{kg}$ und Länge $l = 3.4\,\mathrm{m}$ wird bei A am linken Ende und bei B im Abstand $\overline{AB} = 2.6\,\mathrm{m}$ vom linken Ende unterstützt. Berechnen Sie die Kraft, mit der die Stütze bei B den Balken tragen muss.



Wir wählen die Drehachse bei A. Dann erzeugen die Gewichtskraft, die im Schwerpunkt bei $\overline{AS} = l/2$ angreift, und die Stützkraft bei B ein Drehmoment auf den Balken (Die Stützkraft bei A hat Hebelarm Null und erzeugt bei dieser Wahl kein Drehmoment). Die Drehmomente müssen sich kompensieren, also ist

$$a_B F_B = a_G F_G \rightarrow F_B = \frac{a_G \cdot F_G}{a_B} = \frac{(l/2) \cdot mg}{a_B} = \frac{3.4\,\mathrm{m} \cdot 18\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}{2 \cdot 2.6\,\mathrm{m}} = 115\,\mathrm{N} = 0.12\,\mathrm{kN}$$

Wenn wir die Drehachse bei B wählen, können wir die Stützkraft bei A bestimmen. Danach können wir die Rechnung prüfen, denn es muss ja $F_A + F_B = F_G$ gelten. Der Balken muss bezüglich jeder Wahl der Drehachse im Gleichgewicht sein.

Das Hebelgesetz lässt sich leicht auf mehr als zwei Drehmomente erweitern: $\sum_i M_i = 0$.

Wenn ein starrer Körper im Gleichgewicht ist, kann sich sein Massenmittelpunkt immer noch mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Er kann auch um diesen Punkt rotieren (diese drehmomentfreie Rotationsbewegung kann im allgemeinen Fall recht kompliziert aussehen).

Zurück zum Formelblatt.

Druck

Pflicht

$$p = \frac{F_N}{A} \qquad [p] = 1\,\mathrm{N/m^2} = 1\,\mathrm{Pa} \quad \text{(Pascal)}$$

Der Druck ist definiert als Kraft pro Fläche, wobei die Kraftkomponente senkrecht zur Fläche (Normalkraft) einzusetzen ist. Die Kraftkomponente parallel zur Fläche führt auf die Schubspannung, die Kraftkomponente senkrecht zur Oberfläche führt auf die Zug- oder Druckspannung.

Für den technischen Gebrauch ist die Einheit *Bar* gebräuchlich: $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$ (exakt).
1 bar ist ungefähr der irdische Luftdruck auf Meereshöhe (Normdruck).

Beispiel: Ein Blatt Papier der Stärke $100\,\mathrm{g/m^2}$ liegt flach auf dem Tisch. Welchen Druck erzeugt es ungefähr durch sein Gewicht?

$$p = \frac{F_N}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{m}{A} \cdot g \approx 0.100\,\mathrm{kg/m^2} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 1.0\,\mathrm{Pa}.$$

Wird eine Flüssigkeit (oder ein Gas) in einem geschlossenen Zylinder durch einen Kolben unter Druck gesetzt, so steigt der Druck überall im Fluid und in alle Richtungen gleich an.
Der Druck in einer ruhenden Flüssigkeit verursacht Kräfte, die senkrecht auf die Behälterwände wirken.

Zurück zum Formelblatt.

Druckarbeit

Kür

$W = p \cdot \Delta V$ aus $W = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$

Die Arbeit, die eine Pumpe verrichtet, ist das Produkt aus (mittlerem) Druck und gepumptem Volumen.

Beispiel: Die Einspritzpumpe für einen sog. common-rail Dieselmotor erzeugt Drücke von 2000 bar und hat eine Leistung von 1 PS. Berechnen Sie die Fördermenge.

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{p \cdot \Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{P}{p} = \frac{1\,\mathrm{PS} \cdot 735\,\mathrm{W/PS}}{2000\,\mathrm{bar} \cdot 10^5\,\mathrm{Pa/bar}} = 3.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3/s} = \underline{\underline{13\,\mathrm{L/h}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Normdruck

Pflicht

$$p_n = 101\,325\,\mathrm{Pa}$$

Der Normdruck ist ziemlich genau der mittlere, irdische Luftdruck auf Meereshöhe. Man hat ihn früher als Masseinheit namens 'physikalische Atmosphäre' verwendet: 1 atm = 1.01325 bar.

Zurück zum Formelblatt.

Schweredruck

Pflicht

$$p_S = \rho g h$$

Taucht man in einer Flüssigkeit um die Höhe h nach unten, so steigt der Druck um p_S an. Der Absolutdruck in der Tiefe h unter der Oberfläche eines Sees ist die Summe aus Luftdruck und Schweredruck. Die genannte Formel gilt, solange das Fluid (Flüssigkeit oder Gas) als inkompressibel betrachtet werden darf.

Beispiel: Wie viel steigt der Druck, wenn man im Schwimmbad 3.0 m tief taucht?

$$p_S = \rho g h = 998\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3.0\,\mathrm{m} = 2.94 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa} = \underline{\underline{0.29\,\mathrm{bar}}}$$

Pro zehn Meter Wassersäule steigt der Druck etwa um ein Bar.

Beispiel: Auf welchen Wert sinkt der Luftdruck, wenn man von Meereshöhe hundert Meter nach oben steigt?

$$p = p_n - \rho g h = 101325\,\mathrm{Pa} - 1.293\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 100\,\mathrm{m} = 101325\,\mathrm{Pa} - 1268\,\mathrm{Pa} = \underline{\underline{1.0006\,\mathrm{bar}}}$$

Die Dichte von Luft gilt für 0 °C. Für diesen kleinen Höhenunterschied wurde die Luftdichte als konstant angenommen.

Zurück zum Formelblatt.

Staudruck

Kür

$$\Delta p = \tfrac{1}{2}\rho v^2$$

Wird eine Flüssigkeit der Dichte ρ und Schnelligkeit v auf Null abgebremst, so steigt der Druck um Δp an. Umgekehrt kann ein Druckunterschied von Δp eine reibungsfreie, ruhende Flüssigkeit auf die Geschwindigkeit v beschleunigen. Begründung:

$$W = \tfrac{1}{2}mv^2 \rightarrow p \cdot \Delta V = \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot v^2 \Rightarrow \Delta p = \tfrac{1}{2}\rho v^2$$

Beispiel: Die Pumpe einer Feuerwehrspritze erzeugt einen Überdruck von 8.0 bar. Wie schnell spritzt das Wasser aus der Düse am Schlauch?

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}{998\,\mathrm{kg/m^3}}} = \underline{\underline{40\,\mathrm{m/s}}}$$

Beispiel: Der Staudamm hat ein Loch 20 m unter dem Wasserspiegel. Wie schnell spritzt das Wasser heraus?

$$\Delta p = \tfrac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \quad \text{Ausflussgesetz von Torricelli}$$
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{20\,\mathrm{m/s}}}$$

Bei diesem Gesetz wird der Druckverlust durch Strömungswiderstand vernachlässigt.

Zurück zum Formelblatt.

Auftrieb

Kür

$$F_A = \rho_F g V_K$$

Ein Körper des Volumens V_K erfährt in einem Fluid der Dichte ρ_F die Auftriebskraft F_A. Der Auftrieb entspricht dem Gewicht des verdrängten Fluids (Gesetz von Archimedes).

Beispiel: Welche Auftriebskraft erfährt ein Präzisionsmassestück von 1.000000 kg Masse aus Stahl wegen des Auftriebs der Luft?

$$F_A = \rho_L g V_K = \rho_L g \frac{m}{\rho_S} = \frac{1.2\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1.000000\,\mathrm{kg}}{7.9 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}} = \underline{\underline{1.5\,\mathrm{mN}}}$$

Weder der Luftdruck (für die Luftdichte) noch die Stahlsorte (für die Stahldichte) sind genauer spezifiziert. Das Resultat weist höchstens zwei wesentliche Ziffern auf.

Beispiel: Welcher Anteil des Volumens eines schwimmenden Eiswürfels befindet sich unter Wasser?

$V_K = V_\mathrm{u} + V_\mathrm{ü}$ Der Würfel ist teilweise unter (V_u) und teilweise über ($V_\mathrm{ü}$) Wasser

$F_G = F_A$ Im Gleichgewicht wird das Gewicht des Würfels durch den Auftrieb kompensiert.

$$\rho_E g V_K = \rho_W V_\mathrm{u} g + \rho_\mathrm{Luft} V_\mathrm{ü} g \approx \rho_W V_\mathrm{u} g$$

$$\frac{V_\mathrm{u}}{V_\mathrm{K}} = \frac{\rho_E}{\rho_W} = \frac{917\,\mathrm{kg/m^3}}{1000\,\mathrm{kg/m^3}} = \underline{\underline{91.7\,\%}}$$

In der Lösung wurde die Dichte von Süsswasser bei 0 °C verwendet. Eisberge schwimmen im salzigen Meer, das eine höhere Dichte hat.

Zurück zum Formelblatt.

Kontinuitätsgleichung

Kür

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot \upsilon = \text{const}$$

Wenn in einen Schauch 3 Liter pro Sekunde Wasser hinein fliessen, so fliessen auch drei Liter pro Sekunde wieder heraus. Der Volumenstrom $q = \Delta V/\Delta t$ einer inkompressiblen Flüssigkeit ist konstant. Wenn die Querschnittsfläche A eines Schlauches durch eine Düse verengt wird, so fliesst die Flüssigkeit in der Düse schneller als im Schlauch. Die Variable υ bezeichnet die mittlere Strömungsgeschwindigkeit.

Beispiel: Was passiert mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit, wenn sich der Durchmesser eines Rohres halbiert?

$$\upsilon A = \text{const} \Rightarrow \upsilon \propto \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ist umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche ($\upsilon \propto 1/A$), deshalb vervierfacht sich die Geschwindigkeit, wenn der Durchmesser halbiert wird ($A \propto d^2$).

Beispiel: Der runde Druckstollen des Kraftwerks Pradella-Martina hat den Durchmesser 6.0 m und ein Schluckvermögen von 93 $\mathrm{m^3/s}$. Berechnen Sie die mittlere Strömungsgeschwindigkeit.

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = q = \upsilon \cdot A = \upsilon \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 \Rightarrow$$
$$\upsilon = \frac{4q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 93\,\mathrm{m^3/s}}{\pi \cdot (6.0\,\mathrm{m})^2} = \underline{\underline{3.3\,\mathrm{m/s}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Luftwiderstand

Kür

$$F_w = c_W A \tfrac{1}{2} \rho \upsilon^2$$

Bei nicht allzu kleinen Geschwindigkeiten ist die Luftwiderstandskraft F_w auf einen Körper, der sich mit Schnelligkeit υ relativ zur Luft (oder einem anderen Fluid) bewegt, proportional zum Quadrat dieser Schnelligkeit. Der Strömungswiderstand ist ausserdem proportional zur Dichte ρ der Luft sowie zur Querschnittsfläche A (Stirnfläche, Projektionsfläche in Strömungsrichtung) des umströmten Körpers. Der Widerstandsbeiwert c_w wird im Windkanal gemessen und ist tabelliert. Der Zahlenwert ist über grosse Geschwindigkeitsbereiche konstant, verändert sich aber z.B. beim Übergang von Unter- zu Überschallgeschwindigkeit.

Beispiel: Wie viel steigt der Benzinverbrauch eines Autos aufgrund des Luftwiderstands, wenn dieselbe Strecke mit 10 % höherer Geschwindigkeit durchfahren wird?

$$W = F_W s \propto \upsilon^2 \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^2 = 1.10^2 = 1.21 = 100\,\% + \underline{\underline{21\,\%}}$$

Beispiel: Ein Tischtennisball hat 40 mm Durchmesser und 2.7 g Masse. Welche Geschwindigkeit kann er erreichen, wenn man ihn vom Dach eines Hochhauses fallen lässt?

Der Ball wird immer schneller, bis das Gewicht vom Luftwiderstand kompensiert wird.

$$mg = c_w \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 \cdot \tfrac{1}{2} \rho \upsilon^2$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{8mg}{c_w \pi d^2 \rho}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 2.7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}{0.47 \cdot \pi \cdot (40 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 \cdot 1.2\,\mathrm{kg/m^3}}} = \underline{\underline{8.6\,\mathrm{m/s}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Temperatur

Pflicht

$$T - \vartheta = 273.15\,\mathrm{K}$$
$$\Delta T = \Delta\vartheta$$

Die Variable T steht für eine absolute Temperatur in Kelvin, der Platzhalter ϑ (auch t) für eine Temperaturangabe in Grad Celsius. Die Celsiusskala war früher so definiert, dass bei Normaldruck der Erstarrungspunkt von Wasser bei 0 °C liegt und der Siedepunkt bei 100 °C.

Das Kelvin ist die SI-Basiseinheit der Temperatur. Die Celsiusskala ist 273.15 Einheiten gegen die Kelvinskala verschoben. Der absolute Temperaturnullpunkt liegt bei 0 K respektive -273.15 °C.

1. Beispiel: Der Schmelzpunkt von Gold liegt bei 1064,18 °C (wikipedia). Wie viel ist das in Kelvin?

$$\vartheta = 1064.18\,^{\circ}\mathrm{C}$$
$$T = (1064.18 + 273.15)\,\mathrm{K} = 1337.33\,\mathrm{K}$$

2. Beispiel: Die Temperatur in einer Probe steigt um 37 °C. Wie gross ist der gleiche Temperaturanstieg in Kelvin?

$$\Delta\vartheta = 37\,^{\circ}\mathrm{C} \equiv 37\,\mathrm{K} = \Delta T$$

Temperatur*unterschiede* haben in der Celsius- und Kelvinskala denselben Zahlenwert.

Zurück zum Formelblatt.

Wärmeausdehnung

Kür

$$\Delta l = \alpha_0 l_0 \cdot \Delta\vartheta$$

Die meisten Stoffe dehnen sich aus, wenn sie erhitzt werden. Für kleine Temperaturveränderungen $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0$ ist die Längenveränderung Δl proportional zu $\Delta\vartheta$ und proportional zur Ausgangslänge l_0. Die Grösse α_0 heisst Längenausdehnungskoeffizient. Die Ausgangslänge l_0 und der Wärmeausdehnungskoeffizient α_0 sind bei der Ausgangstemperatur ϑ_0 gemessen. α_0 ist tabelliert.

Bei Flüssigkeiten gilt ein analoges Gesetz für das Volumen.

$$\Delta V = \gamma_0 V_0 \cdot \Delta\vartheta \qquad \gamma_0\text{: Volumenausdehnungskoeffizient bei der Bezugstemperatur } \vartheta_0$$

Der Volumenausdehnungskoeffizient eines Festkörpers folgt aus dem Längenausdehnungskoeffizienten: $\gamma = 3\alpha$.

Beispiel: Ein Blechlineal (Eisen) ist 1000 mm lang. Wie viel zieht er sich zusammen, wenn er um 10 °C abkühlt?

$$\Delta l = \alpha l \Delta\vartheta = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1} \cdot 1000\,\mathrm{mm} \cdot (-10\,\mathrm{K}) = \underline{\underline{-0.12\,\mathrm{mm}}}$$

Beispiel: Eine gewisse Menge Quecksilber erhitzt sich von 20 auf 30 °C. Berechnen Sie die relative Veränderung der Dichte.

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{m}{V_0 + \gamma_0 V_0 \cdot (\vartheta - \vartheta_0)}$$

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1 = \frac{1}{1 + \gamma_0 \cdot (\vartheta - \vartheta_0)} - 1 = \frac{1}{1 + 1.82 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1} \cdot (30 - 20)\,\mathrm{K}} - 1 = \underline{\underline{-1.82 \cdot 10^{-3}}}$$

Wasser dehnt sich nicht linear aus. Um die Volumenausdehnung von Wasser zu berechnen, sollten Messwerte aus einer Dichtetabelle $\rho(\vartheta)$ verwendet werden.

Zurück zum Formelblatt.

Spezifische Wärmekapazität

Pflicht

$$\Delta Q = c_p m \Delta\vartheta$$
$$c_p = 4182\,\mathrm{J/(kg \cdot K)} \qquad \text{spezifische Wärmekapazität von Wasser bei } 20\,°\mathrm{C}$$

ΔQ ist die Wärmemenge (in Joule), die einem Körper der Masse m bei konstantem Druck (Index $_p$) zugeführt werden muss, um seine Temperatur um $\Delta\vartheta$ zu erhöhen. Die spezifische Wärmekapazität c_p ist eine tabellierte Materialgrösse.

Beispiel: Wie viel Wasser kann man mit einer Kilowattstunde Heizenergie von 20 auf 100 °C erhitzen?

$$m = \frac{\Delta Q}{c\Delta\vartheta} = \frac{1\,\mathrm{kWh} \cdot 3.6 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kWh}}{4182\,\mathrm{J/(kgK)} \cdot (100 - 20)\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{11\,\mathrm{kg}}}$$

Beispiel: Jemand kommt auf die Idee, einen Zinnbecher (104 g) im Tiefkühler (-18 °C) aufzubewahren, damit er jederzeit ein Getränk ($\approx$ 100 g Wasser bei 26 °C) kühl geniessen kann. Welche Mischtemperatur stellt sich ein?

$$Q_{\text{aufgenommen}} + Q_{\text{abgegeben}} = 0 \qquad \text{Energiesatz}$$
$$c_Z m_Z \cdot (\vartheta_M - \vartheta_Z) + c_W m_W \cdot (\vartheta_M - \vartheta_W) = 0$$
$$\vartheta_M = \frac{c_Z m_Z \vartheta_Z + c_W m_W \vartheta_W}{c_Z m_Z + c_W m_W} = \frac{227\,\mathrm{J/(kg \cdot K)} \cdot 104\,\mathrm{g} \cdot (-18\,°\mathrm{C}) + 4182\,\mathrm{J/(kgK)} \cdot 100\,\mathrm{g} \cdot 26\,°\mathrm{C}}{227\,\mathrm{J/(kg \cdot K)} \cdot 104\,\mathrm{g} + 4182\,\mathrm{J/(kgK)} \cdot 100\,\mathrm{g}}$$
$$\vartheta_M = \underline{\underline{24\,°\mathrm{C}}}$$

Die spezifische Wärmekapazität von Wasser ist gross im Vergleich zu Zinn.

Die spezifische Wärmekapazität von Wasser variiert etwa ein Prozent zwischen Null und hundert Grad Celsius, andere Stoffe können mehr variieren. Der Aggregatzustand darf sich nicht ändern.

Zurück zum Formelblatt.

Latente Wärme

Pflicht

$Q = mL$	Latente Wärme
$L_V = 2.257 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg}$	spezifische Verdampfungswärme von Wasser bei 100 °C
$L_f = 3.338 \cdot 10^5\,\mathrm{J/kg}$	spezifische Schmelzwärme von Eis bei 0 °C

Wird einem Stoff beim Schmelz- oder Siedepunkt Wärme zugeführt, so äussert sich das nicht in einer Temperaturzunahme: Man sagte früher, die Wärme sei latent (lat. für versteckt). Die latente Wärme ist proportional zur Masse des Stoffes, der die Phasenumwandlung durchmacht, und hängt ab vom Stoff. Diese Stoffgrössen, z.B. die spezifische Verdampfungswärme, sind tabelliert. Beim Schmelzen wird die Schmelzwärme $Q = +mL_f$ aufgenommen; beim Erstarren wird die Erstarrungswärme $Q = -mL_f$ abgegeben. Schmelz- und Erstarrungswärme sind betragsmässig gleich gross. (analog die Verdampfungs- und Kondensationswärme)

Beispiel: Welche Temperatur muss das Wasser haben, um damit dieselbe Masse Eis bei 0 °C zu schmelzen?

$$mL_f + cm(\vartheta_f - \vartheta) = 0$$

$$\vartheta = \frac{L_f}{c} + \vartheta_f = \frac{3.338 \cdot 10^5\,\mathrm{J/kg}}{4182\,\mathrm{J/kf}} + 0\,^\circ\mathrm{C} = \underline{\underline{79.8\,^\circ\mathrm{C}}}$$

Beispiel: Milch wird oft mit Dampf erhitzt. Wie viel Wasserdampf von 100 °C muss in 250 g Milch von 5 °C kondensieren, damit sich eine Mischtemperatur von 45 °C ergibt? Die spezifische Wärmekapazität von Milch beträgt 3.8 kJ/(kg · K). Vernachlässigen Sie den Behälter.

$$Q_{\text{aufgenommen}} + Q_{\text{abgegeben}} = 0$$

$$\underbrace{c_M m_M(\vartheta_2 - \vartheta_1)}_{\text{Milch erhitzen}} \underbrace{-m_D L_V}_{\text{Dampf kondensieren}} + \underbrace{c_W m_D(\vartheta_2 - \vartheta_S)}_{\text{Kondensat abkühlen}} = 0$$

$$m_D = \frac{c_M m_M(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{L_V - c_W(\vartheta_2 - \vartheta_S)} = \frac{3.8 \cdot 10^3\,\mathrm{J/(kgK)} \cdot 0.250\,\mathrm{g} \cdot (45-5)\,^\circ\mathrm{C}}{2.257 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg} - 4182\,\mathrm{J/(kgK)} \cdot (45-100)\,^\circ\mathrm{C}} = \underline{\underline{15\,\mathrm{g}}}$$

Die spezifische Verdampfungswärme hängt von der Temperatur ab. Verdunstet Wasser bei 0 °C, so beträgt sie 2.50 MJ/kg. Beim kritischen Punkt, 374 °C für Wasser, verschwindet die Verdampfungswärme. Kür

Zurück zum Formelblatt.

Wärmeleitung

Kür

$$J = U \cdot \Delta\vartheta$$

Die Wärmestromdichte J durch eine Wand oder Platte ist proportional zum Unterschied $\Delta\vartheta$ der Lufttemperaturen. Der *Wärmedurchgangskoeffizient* U (früher k-Wert) hängt ab vom Aufbau der Wand (Dicke, Isolation, Material, etc.) und ist tabelliert.

Der *Wärmestrom* $P = \Delta Q/\Delta t$ ist die Wärmeenergie, die pro Zeit durch eine Fläche hindurch tritt. Der Wärmestrom wird in Watt gemessen. Die *Wärmestromdichte* $J = P/A$ ist der Wärmestrom pro Fläche und wird in $\mathrm{W/m^2}$ gemessen.

Beispiel: Eine Plexiglasscheibe von 5 mm Dicke hat U = 5.3 $\mathrm{W/(m^2K)}$. Berechnen Sie die Verlustleistung durch eine Scheibe von 3.5 $\mathrm{m^2}$ Fläche bei einem Temperaturunterschied von 18 °C.

$$P = JA = U\Delta\vartheta A = 5.3\,\mathrm{W/(m^2K)} \cdot 18\,\mathrm{K} \cdot 3.5\,\mathrm{m^2} = \underline{\underline{0.33\,\mathrm{kW}}}$$

Die Wärmestromdichte durch eine homogene Platte ist proportional zur Differenz $\Delta\vartheta$ der Oberflächentemperaturen, umgekehrt proportional zur Dicke Δx der Platte und hängt ab vom Material über die so genannte *Wärmeleitfähigkeit* λ.

$$J = -\lambda \cdot \frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}$$

In dieser Gleichung steht das Minuszeichen, um auszudrücken, dass der Wärmestrom in die Richtung der tieferen Temperatur geht, d.h. $\Delta T = T_2 - T_1 < 0$. Die Grösse $\Delta\vartheta/\Delta x$ oder dT/dx heisst Temperaturgradient (Temperaturgefälle).

Beispiel: Eine Plexiglasplatte von 5.0 mm Dicke und 3.5 $\mathrm{m^2}$ Fläche weist an der inneren Oberfläche eine Temperatur von 23 °C und aussen 5 °C auf. Die Wärmeleitfähigkeit von Plexiglas ist 0.19 $\mathrm{W/(m \cdot K)}$. Berechnen Sie den Wärmestrom von innen nach aussen.

$$P = -JA = -\lambda A\frac{\Delta T}{\Delta x} = -0.19\,\mathrm{W/(m\cdot K)} \cdot 3.5\,\mathrm{m^2} \cdot \frac{(5-23)\,\mathrm{K}}{5.0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{2.4\,\mathrm{kW}}}$$

Dieser Wert ist höher als beim vorangehenden Beispiel auf dieser Seite, weil beim U-Wert berücksichtigt ist, dass die Luftfilme, die an der Oberfläche haften, einen isolierenden Effekt haben.

Zurück zum Formelblatt.

Stefan-Boltzmann Gesetz

Kür

$$J = \sigma T^4$$
$$\sigma = 5.670\,374\,419.. \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)} \qquad \text{exakt}$$

Ein heisser Körper strahlt Wärme ab. Schwarze Körper (Hohlraumstrahler) senden am meisten Wärmestrahlung aus. Die Wärmestromdichte J von der Oberfläche eines schwarzen Körpers hängt nur von der *absoluten* Temperatur (in Kelvin) ab. Die Stefan-Boltzmann Konstante σ ist eine Naturkonstante.

1. Beispiel: Wie viel Wärme strahlt ein Stück glühende Holzkohle (800 °C) ab?

$$J = \sigma T^4 = 5.670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)} \cdot ((800 + 273.15)\,\mathrm{K})^4 = 75.2\,\mathrm{kW/m^2}$$

2. Beispiel: Welche Temperatur kann ein schwarzes Auto im Sonnenlicht maximal erreichen?

Das Maximum ist dann erreicht, wenn die Einstrahlung gerade die Verluste durch Abstrahlung kompensiert. Die Einstrahlung ist maximal gleich der Solarkonstanten J_S. Wenn wir alle anderen Verluste ignorieren, gilt

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \qquad \text{(im Gleichgewicht)}$$
$$\sigma T^4 = J_S$$
$$T = \left(\frac{J_S}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{1366\,\mathrm{W/m^2}}{5.670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}}\right)^{1/4} = \underline{\underline{394.0\,\mathrm{K}}} \mathrel{\hat{=}} 121\,°\mathrm{C}$$

Zurück zum Formelblatt.

Solarkonstante

Kür

$$J = 1\,366(30)\,\mathrm{W/m^2}$$

Die (irdische) Solarkonstante ist die mittlere Leistung pro Fläche, welche die Sonne am oberen Rand der Atmosphäre auf eine senkrecht zur Einstrahlung orientierte Fläche einstrahlt.

Beispiel: Wie viel Leistung fällt maximal auf eine Solarzelle von $2.8\,\mathrm{cm^2}$ Fläche?

$$P = JA = 1366\,\mathrm{W/m^2} \cdot 2.8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2} = \underline{\underline{0.38\,\mathrm{W}}}$$

Nur ein Teil dieser Leistung (10-25 %) wird in elektrische Leistung umgewandelt.

Zurück zum Formelblatt.

Avogadrokonstante und Stoffmenge

Pflicht

$$N_A = 6.022\,140\,76 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1} \qquad \text{exakt}$$
$$n = N/N_A$$

Die Avogadrokonstante N_A ist das Verhältnis von Teilchenzahl N zu Stoffmenge n

Die *Stoffmenge* hat die Einheit Mol. Das Mol ist eine SI-Basiseinheit. Der Zahlenwert der Avogadrokonstanten erklärt sich aus der alten (bis 2018) Definition des Mols: 1 mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso vielen Einzelteilchen besteht, wie Atome in 0.012 kg des Nuklids C-12 enthalten sind.

Ein *Nuklid* (oder Isotop) ist eine Atomsorte mit einer bestimmten Anzahl Protonen und Neutronen im Kern. Ein Element hat meistens mehrere Isotope. Der Überbegriff von Neutron und Proton ist Nukleon.

Verschiedene Schreibweisen für ein Nuklid: ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, ${}^{A}\mathrm{X}$ oder X-A
A: Massen- oder Nukleonenzahl, Z: Protonen-, Kernladungs- oder Ordnungszahl, X: Name des Elements.

Beispiel: Ein Mensch habe 5.5 Liter Blut mit einer Hämoglobinkonzentration von 9 mmol/L. Wie viele Hämoglobinmoleküle besitzt dieser Mensch also?

$$N = nN_A = cVN_A = 9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol/L} \cdot 5.5\,\mathrm{L} \cdot 6.022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1} = \underline{\underline{3 \cdot 10^{22}}}$$

Beispiel: Berechnen Sie die Stoffmenge der Abgase (CO_2 und H_2O) bei der vollständigen Verbrennung von einem Mol n-Oktan (C_8H_{18}) sowie die notwendige Stoffmenge Sauerstoff (O_2).

$$1\mathrm{C_8H_{18}} + (8 + \tfrac{9}{2})\mathrm{O_2} \longrightarrow 8\mathrm{CO_2} + 9\mathrm{H_2O}$$

Um 1 mol Oktan zu verbrennen, werden 12.5 mol Sauerstoff benötigt. Dabei entstehen 8 mol Kohlendioxid und 9 mol Wasserdampf.

Zurück zum Formelblatt.

Atomare Masseneinheit

Kür

$$1\,\mathrm{u} = 1.660\,539\,066\,60(50) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Die atomare Masseneinheit 1 u ("unit") ist ein Zwölftel der Masse eines freien C-12 Atoms.

Die Masse eines Wasserstoffatoms, eine Protons oder eines Neutrons ist ungefähr 1 u. Da ein Nukleon (Proton oder Neutron) etwa 1.0 u Masse hat und Elektronen wesentlich leichter sind, ist die atomare Masse eines Atoms in units *ungefähr* gleich der Nukleonenzahl. Die *genaue* Masse eines Nuklids muss in einer Nuklidtabelle nachgeschlagen werden; die Massen von Protonen, Neutronen und Elektronen zusammenzuzählen führt zu einem Fehler (Massendefekt).

Welche Masse hat ein Au-198 Atom? (Das einzige stabile Isotop von Gold).

Die atomare Masse ist in einer Nuklid- oder Isotopentabelle zu finden und wird dort in atomaren Masseneinheiten angegeben.

$$m_a = 196.966\,552\,\mathrm{u} \cdot 1.660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/u} = \underline{\underline{3.270\,706\,54 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}}}$$

Bemerkung
Bis 2018 waren sowohl die molare, als auch die atomare Masse via das C-12 Nuklid definiert. Damit galt $m_a = M/N_A$, d.h. die atomare Masse m_a war der Quotient aus molarer Masse M und Avogadrokonstante N_A. Mit der Neudefinition des Mols (2018) wurde diese Verbindung gelöst, d.h. es gilt nur noch $m_a \approx M/N_A$.

Zurück zum Formelblatt.

Molare Masse

Pflicht

$$M = \frac{m}{n}$$

Die molare Masse ist eine Stoffgrösse und hat die Einheit g/mol respektive kg/mol.

Die molaren Massen der Elemente sind in chemischen Tabellen oder im Periodensystem aufgelistet. Für isotopenreine Stoffe verwendet man besser die atomare Masse aus einer Nuklidtabelle.

Beispiel: Berechnen Sie die Stoffmenge von 1.00 kg Wasser.

$$n = \frac{m}{M_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{1.00\,\mathrm{kg}}{(2 \cdot 1.00794 + 15.9994) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}} = \underline{\underline{55.5\,\mathrm{mol}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Zustandsgleichung des idealen Gases

Pflicht

$$\frac{pV}{NT} = k \qquad k = 1.380\,649 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \quad \text{Boltzmannkonstante, exakt}$$

oder

$$\frac{pV}{nT} = R \qquad R = 8.314\,462\,618...\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \quad \text{universelle Gaskonstante (exakt)}$$

Die Zustandsgleichung beschreibt, wie Druck p, Volumen V, absolute Temperatur T und die Menge (N, n) eines idealen (verdünnten) Gases zusammenhängen. Sie wird mit der Teilchenzahl N oder alternativ mit der Stoffmenge n geschrieben. Die Zustandsgleichung enthält keine Materialgrössen. Aus der Definition des Mols folgt $R = kN_A$.

Beispiel: Eine Gasflasche wird befüllt. Dabei steigt die Temperatur von 291 K auf 316 K und der Druck von 80 bar auf 270 bar. Wie viel mal mehr Gasteilchen enthält die Flasche nachher?

$$\frac{p_1 V}{N_1 T_1} = k = \frac{p_2 V}{N_2 T_2} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = \frac{270\,\mathrm{bar} \cdot 291\,\mathrm{K}}{80\,\mathrm{bar} \cdot 316\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{3.11}}$$

Beispiel: molares Normvolumen V_{mn}
Wie gross ist das Verhältnis von Volumen zu Stoffmenge für ein ideales Gas bei Normbedingungen?

$$V_{mn} = \frac{V}{n} = \frac{RT_n}{p_n} = \frac{8.31446\,\mathrm{J/(mol \cdot K)} \cdot 273.15\,\mathrm{K}}{101325\,\mathrm{Pa}} = \underline{\underline{22.414 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3/mol}}}$$

Ein Mol Gas hat bei 0 °C und Atmosphärendruck auf Meereshöhe ein Volumen von 22.4 Litern.

Beispiel: Berechnen Sie die Masse des Wasserstoffs in einer 50 Liter-Gasflasche bei 20 °C und 300 bar Druck.

$$m = Mn = M \cdot \frac{pV}{RT} = \frac{2 \cdot 1.0079 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol} \cdot 300 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}}{8.314\,\mathrm{J/(mol \cdot K)} \cdot (273.15 + 20)\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{1.2\,\mathrm{kg}}}$$

Bemerkung: Werden zwei der Grössen p, V, n und T konstant gehalten, so ergeben sich folgende Zusammenhänge zwischen den anderen (Benennung nicht einheitlich): Kür

$pV = \text{const}$	Gesetz Boyle-Mariotte
$p/T = \text{const}$	Gesetz von Amontons
$V/T = \text{const}$	Gesetz von Gay-Lussac
$V/n = \text{const}$	Gesetz von Avogadro
$p/n = \text{const}$	Gesetz von Dalton

Zurück zum Formelblatt.

Kinetische Gastheorie

Kür

$$\tfrac{1}{2} m_a v^2 = \tfrac{3}{2} kT$$

Die mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens der Masse m_a ist proportional zur absoluten Temperatur T des Gases; k ist die Boltzmannkonstante.

Beispiel: Mit welcher mittleren Geschwindigkeit bewegen sich die Wasserdampfmoleküle in der Zimmerluft bei 24 °C Temperatur?

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m_a}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot (273.15 + 24)\,\mathrm{K}}{(2 \cdot 1.008 + 16.00)\,\mathrm{u} \cdot 1.661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/u}}} = \underline{\underline{641\,\mathrm{m/s}}}$$

Mit ‘mittlere Geschwindigkeit’ ist hier der quadratische Mittelwert gemeint (rms: root mean square). Die atomare Masse in units ist tabelliert.

Beispiel: Drücken Sie die mittlere Geschwindigkeit durch die molare Masse des Gases aus.

$kN_A = R$ Avogadrokonstante N_A, universelle Gaskonstante R

$m_a = M/N_A$ atomare Masse m_a und molare Masse M

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m_a}} = \sqrt{\frac{3kN_AT}{M}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$ Beachte: M in kg/mol einsetzen!

Bemerkungen

Mit ‘kinetische Energie’ ist hier nur die Translationsenergie des Schwerpunkts gemeint; Rotationsenergie und allenfalls Vibrationsenergie kommen separat hinzu.

Die Verteilung der Geschwindigkeit um den Mittelwert herum wird durch die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung beschrieben.

Zurück zum Formelblatt.

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Pflicht

$$\Delta U = Q + W + \dots$$

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik ist eine spezielle Schreibweise des Energiesatzes: Die Änderung ΔU der inneren Energie eines Systems ist gleich der Summe der von oder an ihm verrichteten Arbeit W, der zu- oder abgeführten Wärme Q sowie weiterer Energietransfers wie z.B. zu- oder abgeführter chemischer Energie. Alle Grössen sind vorzeichenbehaftet.

Beispiel: Wie viel Energie verliert ein Mensch (70 kg) etwa, wenn er 35 g Wasser schwitzt?

$$\Delta U = Q = -mL_V \approx -35 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 2.4 \cdot 10^6\,\text{J/kg} = \underline{\underline{-84\,\text{kJ}}}$$

Beispiel: Wie viel Energie gewinnt ein Auto etwa, wenn es 40 kg Benzin tankt?

$$\Delta U = W + Q + \cdots = 0 + 0 + mH = 40\,\text{kg} \cdot 43.5 \cdot 10^6\,\text{J/kg} = \underline{\underline{1.7\,\text{GJ}}}$$

Die chemische Energie wurde durch die Verbrennungswärme mit dem unteren Heizwert H abgeschätzt.

Beispiel: Eine kleine Menge idealen Gases wird schnell komprimiert. Während der Kompression wird die Arbeit W an ihm verrichtet. Was passiert mit der Temperatur des Gases?

Wenn der Vorgang schnell abläuft, steht keine Zeit für einen Temperaturausgleich respektive Wärmeaustausch mit der Umgebung zur Verfügung (*adiabatischer* Prozess). Aus der kinetischen Gastheorie folgt, dass die innere Energie eines Gases proportional zur absoluten Temperatur steigt: $U = N \cdot \frac{3}{2} k_B T$.

$$\begin{aligned} \Delta U &= W + Q + \dots \\ N \cdot \tfrac{3}{2} k_B \cdot \Delta T &= W \end{aligned}$$

Die Temperatur des idealen Gases steigt propotional zur an ihm verrichteten Arbeit an.

Zurück zum Formelblatt.

Adiabatische Kompression

Kür

$$pV^{\varkappa} = const \qquad \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa}$$

Die adiabatische Kompression oder Expansion eines Gases ist dadurch charakterisiert, dass keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird. Dies im Gegensatz zu einem isothermen Vorgang, bei dem die Temperatur konstant bleibt. Bei der adiabatischen Kompression wird Arbeit am Gas verrichtet, welche die innere Energie und damit die Temperatur des Gases erhöht. Der Adiabatenexponent $\varkappa = C_p/C_V$ ist eine tabellierte Materialgrösse.

Beispiel: Eine bestimmte Menge Luft wird schnell auf die Hälfte des Ausgangsvolumens komprimiert. Auf welchen Wert steigt der Druck?

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = \left(\frac{1}{0.50}\right)^{1.402} = \underline{\underline{2.6}}$$

Beispiel: Eine bestimmte Menge Luft bei 20 °C wird schnell auf die Hälfte des Ausgangsvolumens komprimiert. Auf welchen Wert steigt die Temperatur?

$$pV = nRT \rightarrow \text{const} = pV^{\varkappa} = \frac{nRT}{V} \cdot V^{\varkappa} \rightarrow \text{const} = TV^{\varkappa-1} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = (273.15 + 20)\,\text{K} \cdot \left(\frac{1}{0.50}\right)^{1.402-1} = 387.35\,\text{K} \rightarrow \underline{\underline{114\,°\text{C}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Verbrenungswärme

Kür

$$Q = m \cdot H$$

Die Wärme Q, die bei der Verbrennung eines Stoffes freigesetzt wird, ist proportional zur Stoffmasse m und einer Materialgrösse H (spezifischer Heizwert, auch Brennwert oder Verbrennungsenthalpie). Der spezifische Heizwert ist tabelliert. Es wird noch unterschieden, ob der Wasserdampf entweicht (unterer Heizwert) oder kondensiert wird (oberer Heizwert, Brennwert).

Beispiel: Eine Paraffin-Kerze wiegt 9 g und verbrennt in 1.5 Stunden. Berechnen Sie die Heizleistung.

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot H}{\Delta t} = \frac{9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 45 \cdot 10^{6}\,\mathrm{J/kg}}{1.5 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{75\,\mathrm{W}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Thermodynamischer Wirkungsgrad

Kür

$$\eta = \frac{T_w - T_k}{T_w}$$

Eine Wärmekraftmaschine entzieht einem warmen Pol bei der Temperatur T_w Wärme, wandelt einen Teil davon in eine andere Energieform um und gibt den Rest an ein kaltes Reservoir bei Temperatur T_k ab. Der thermodynamische Wirkungsgrad dieser Umwandlung ist erstmals von S. Carnot berechnet worden.

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre
Es gibt keine zyklisch arbeitende Wärmekraftmaschine mit einem höheren Wirkungsgrad als dem thermodynamischen Wirkungsgrad.

Beispiel: Die Temperatur des Dampfes aus dem Reaktor eines Kernkraftwerks betrage 280 °C, die Temperatur im Kondensator 90 °C. Wie gross ist der maximal mögliche Wirkungsgrad für die Erzeugung von elektrischer Energie?

$$\eta = \frac{T_w - T_k}{T_w} = \frac{(280 - 90)\,\mathrm{K}}{(273.15 + 280)\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{34\,\%}}$$

Eine Variante des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik ist:
Ohne Zwang fliesst Wärme nur von heissen nach kalten Stellen, nie in umgekehrter Richtung.

Zurück zum Formelblatt.

Elementarladung

Pflicht

Elektrische Ladung ist quantisiert. Jede Ladung ist ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e.

$$e = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \qquad \text{exakt im SI ab 2019}$$

Einheit der elektrischen Ladung: $1\,\mathrm{C}$ (Coulomb) $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A\,s}$

$$Q = z \cdot e \quad \text{mit} \quad z \in \mathbb{Z}$$

1. Beispiel: Wie viel Ladung trägt ein SO_4^{2-}-Ion?

$$Q = z \cdot e = -2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = -3.2044 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

2. Beispiel: Wie viel Ladung trägt ein U-238 Atomkern?

$$\text{U-238} = {}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow Q = ze = +92 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = 1.4740 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{C}$$

Zurück zum Formelblatt.

Ladungserhaltung

Pflicht

In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtladung konstant. Ladung kann weder erzeugt noch vernichtet werden. Wird positive Ladung erzeugt, so muss genau so viel negative Ladung entstehen, damit die Summe konstant bleibt.

$$\sum_i Q_i = \text{const}$$

Beispiel: Bei einem bestimmten radioaktiven Zerfall, einem sogenannten Betazerfall, stösst der Atomkern ein Elektron aus. Was passiert mit dem zurückbleibenden Kern?

Das Elektron trägt eine negative Elementarladung ($q = -e$). Wenn der Kern ein Elektron ausstösst, muss die Kernladung um $+1e$ zunehmen. Da der Kern Protonen und Neutronen enthält, muss die Zahl der Protonen um Eins zugenommen haben. (Ein Neutron hat sich in ein Proton verwandelt).

Zurück zum Formelblatt.

Coulombkraft

Pflicht

Die elektrostatische Kraft zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r ist

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \qquad \varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_0 = 8.854\,187\,8128(13) \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V \cdot m}} \qquad \text{elektrische Feldkonstante}$$

Die Dielektrizitätszahl ε_r ist eine tabellierte Materialgrösse, welche das Medium beschreibt, in das die Ladungen eingebettet sind. Sie hat für Vakuum per Definition den Wert Eins. Die Kraft wirkt abstossend für gleichnamige Ladungen und anziehend für ungleichnamige. Die Kraft wirkt parallel zur Verbindungslinie der Punktladungen.

1. Beispiel: Wie gross müssen zwei gleiche Ladungen sein, damit bei einem Meter Abstand die Coulomkraft ein Newton beträgt?

Falls nichts auf etwas anderes hindeutet, nehmen wir $\varepsilon_r = 1$ an.

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r^2} \Rightarrow Q = r\sqrt{4\pi\varepsilon_0 F_C} = 1\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/(Vm)} \cdot 1\,\mathrm{N}} = \underline{\underline{1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}}}$$

Diese Rechnung zeigt, dass 1 C eine grosse Ladungsmenge ist, weil schon sehr kleine Bruchteile eines Coulombs bereits deutlich fühlbare Kräfte erzeugen.

2. Beispiel: Wie gross ist die Kraft zwischen einem Cl^--Ion und einem Ca^{2+}-Ion in 55 nm Abstand in einer lebenden Zelle ?

Die zwei Ionen sind in Wasser mit $\varepsilon_r \approx 80$ eingebettet.

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \cdot \frac{e \cdot 2e}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 80 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/(Vm)}} \cdot \frac{2 \cdot (1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{(55 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})^2} = \underline{\underline{1.9 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{N}}}$$

Falls die Ladungen nicht punktförmig sind, wird die elektrostatische Kraft via die elektrische Feldstärke berechnet.

Zurück zum Formelblatt.

Elektrische Feldstärke

Pflicht

In der Umgebung einer Ladung gibt es etwas, das Kräfte auf andere Ladungen ausüben kann. Es wird elektrisches Feld genannt. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ist definiert als elektrostatische Kraft $\vec{F}_e$ auf eine kleine, positive Probeladung q pro Ladung.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} \qquad [E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \quad \text{Volt pro Meter}$$

1. Beispiel: Welche Beschleunigung erfährt ein O^{8+}-Ion in einem Feld der Stärke $23\,\mathrm{kV/m}$?

$$a = \frac{F_{\text{res}}}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{8 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 23 \cdot 10^{3}\,\mathrm{N/C}}{16.0\,\mathrm{u} \cdot 1.661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/u}} = \underline{\underline{1.1 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m/s^2}}}$$

2. Beispiel: Wie gross ist die elektrische Feldstärke, welche ein nackter Blei-Atomkern im Abstand $238\,\mathrm{nm}$ vom Zentrum des Atomkerns erzeugt?

$$E = \frac{1}{q} \cdot F_C = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \overset{\text{hier}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze}{r^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/(Vm)}} \cdot \frac{82 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{(238 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})^2} = \underline{\underline{2.08\,\mathrm{MV/m}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Elektrische Feldstärke im Plattenkondensator

Kür

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen, leitenden Platten mit Fläche A und schmalem Spalt der Breite d. Die Platten werden gleich stark aber ungleichnamig aufgeladen. Dann ist die elektrische Feldstärke im Spalt:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon A} = \frac{U}{d}$$

Beispiel: Ein Plattenkondensator mit Luftspalt hat Plattenfläche 2.8 dm^2. Mit wie viel Ladung kann er maximal belegt werden, wenn die Durchschlagfeldstärke $3{\cdot}10^6$ V/m nicht überschritten werden soll?

$$Q = \varepsilon_0 A E = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/(Vm)} \cdot 2.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2 \cdot 3 \cdot 10^6\,\mathrm{V/m} = \underline{\underline{0.7\,\mu\mathrm{C}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Elektrische Spannung

Pflicht

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = E_s \cdot \Delta s_{AB}$$

Die elektrische Spannung U_{AB} zwischen den Punkten A und B ist gleich der Arbeit W_{AB} pro Ladung, die das elektrische Feld an einer kleinen Probeladung q auf dem Weg von A nach B verrichtet. Die elektrische Spannung ist – wie die Arbeit – eine Grösse mit Vorzeichen.

Die Spannung ist auch gleich der Komponente E_s der Feldstärke in Wegrichtung multipliziert mit dem Weg s_{AB} (für ein homogenes, elektrostatisches Feld und einen geraden Weg).

1. Beispiel: Ein Proton wird durch eine Spannung von 1.00 V aus der Ruhelage beschleunigt.
a) Wie viel kinetische Energie gewinnt es?
b) Welche Geschwindigkeit erhält es?

$$\text{a) } U = \frac{W}{q} \Rightarrow W = qU = eU = 1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 1.00\,\mathrm{V} = \underline{\underline{1.60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}}$$

$$\text{b) } \tfrac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 1.00\,\mathrm{V}}{9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = \underline{\underline{5.93 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/s}}}$$

1 eV (*Elektronvolt*) ist die Arbeit, welche das elektrische Feld verrichtet, wenn ein Teilchen mit einer Elementarladung eine Spannung von exakt 1 V durchläuft.

2. Beispiel: Ein Plattenkondensator mit Spaltbreite 1.3 mm und Fläche 1.9 dm^2 wird mit einer Spannung von 84 V belegt. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke im Spalt.

Das Feld im Spalt eines Plattenkondensators ist homogen, also ist

$$U = E \cdot d \rightarrow E = \frac{U}{d} = \frac{84\,\mathrm{V}}{1.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{6.5 \cdot 10^{4}\,\mathrm{V/m}}}$$

Falls die Feldstärke räumlich variiert oder der Weg von A nach B krumm ist, berechnet man die elektrische Spannung durch ein Integral. Kür

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Zurück zum Formelblatt.

Elektrische Stromstärke

Pflicht

Ein physikalischer Strom oder Fluss ist etwas, das durch eine Fläche tritt. Beim elektrischen Strom treten Ladungen durch eine Fläche, z.B. durch die Querschnittsfläche eines Leiters. (Es gibt auch einen Energiefluss, einen Impulsfluss, einen Wärmestrom, etc.)

Die elektrische Stromstärke I ist die Ladungsmenge ΔQ, die pro Zeit Δt durch eine Fläche fliesst.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad [I] = 1\,\mathrm{A} \quad \text{(Ampere)}$$

Das Ampère ist die SI-Basiseinheit der Elektrizität. Das Coulomb ist somit eine zusammengesetzte Einheit ($1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$).

Die *technische Stromrichtung* entspricht der Bewegungsrichtung *positiver* Ladung. Die Elektronen in einem metallischen Stromleiter bewegen sich also entgegen der technischen Stromrichtung. Die technische Stromrichtung im äusseren Stromkreis (ausserhalb der Spannungsquelle) ist vom Pluspol zum Minuspol der Spannungsquelle gerichtet.

Beispiel: Das Ring-Zyklotron am Paul Scherrer Institut erzeugt einen Protonenstrahl von 2.2 mA elektrischer Stromstärke. Berechnen Sie den Teilchenfluss.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{e \cdot \Delta N}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{I}{e} = \frac{2.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}}{1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}} = \underline{\underline{1.4 \cdot 10^{16}\,\mathrm{s}^{-1}}}$$

Beispiel: Zwischen zwei Silberelektroden fliesst ein Strom von 1.0 A durch eine Silbernitratlösung. Die Ladung wird durch Ag^{+}-Ionen transportiert. Wie viel Silber schlägt sich auf der einen Elektrode nieder, wenn der Strom während 1000 s fliesst?

$$\Delta m = m_S \Delta N = m_S \cdot \frac{I \cdot \Delta t}{e} = 107.9\,\mathrm{u} \cdot 1.661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/u} \cdot \frac{1.0\,\mathrm{A} \cdot 1000\,\mathrm{s}}{1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = \underline{\underline{1.1\,\mathrm{g}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Elektrischer Widerstand

Pflicht

Der absolute elektrische Widerstand R ist das Verhältnis von Spannung U zu Stromstärke I:

$$R = \frac{U}{I} \qquad [R] = 1\,\Omega \quad \text{(gr. Omega) “Ohm”}$$

Der Widerstand variiert im Allgemeinen mit der Stromstärke.

Beispiel: Durch ein Glühlämpchen fliesst bei 24 V angelegter Spannung ein Strom von 125 mA. Wie gross ist der Widerstand bei diesen Bedingungen?

$$R = \frac{U}{I} = \frac{24\,\text{V}}{0.125\,\text{A}} = \underline{\underline{0.19\,\text{k}\Omega}}$$

Der Widerstand einer Glühlampe mit Wolframwendel wächst mit steigender Stromstärke.

Das Wort ‘Widerstand’ wird in zwei Bedeutungen verwendet: im Sinne einer Eigenschaft (Widerstand*swert*) oder als Bezeichnung eines Geräts (Widerstand*selement*).

Der *differentielle* Widerstand ist definiert als $R_d = \Delta U/\Delta I$ oder dU/dI. Kür

Der *Leitwert* G ist der Kehrwert des absoluten Widerstands: $G = I/U$ und hat die Einheit Siemens (S).

Zurück zum Formelblatt.

Ohmsches Gesetz

Pflicht

Ein elektrisches Element erfüllt das ohmsche Gesetz, wenn die Stromstärke I proportional zur angelegten Spannung U variiert. Der elektrische Widerstand R ist konstant.

$$U \propto I \qquad\qquad R = const$$

Häufig wird das ohmsche Gesetz $U = RI$ geschrieben, wobei R als konstant vorausgesetzt wird, d.h. der Widerstand ist unabhängig vom Strom.

Viele elektrische Elemente erfüllen das ohmsche Gesetz, solange die Stromstärke klein bleibt. Ein starker Strom erhitzt den Leiter, was oft eine Widerstandsveränderung zur Folge hat. Die Kupferdrähte in Hausinstallationen erhitzen sich kaum und erfüllen das ohmsche Gesetz. Der Wolframdraht in einer Glühlampe erhitzt sich stark und erfüllt das ohmsche Gesetz nicht. Das ohmsche Gesetz ist sehr nützlich, falls es gilt, aber es gilt nicht universell (ähnlich dem Federgesetz).

Beispiel: Durch einen langen, dicken Kupferdraht fliesst ein Strom von 39 mA, wenn eine Spannung von 29 V angelegt wird. Berechnen Sie die Stromstärke, wenn 18.37 V anliegen.

$$U = RI \propto I \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{U_2}{U_1} \Rightarrow I_2 = I_1 \cdot \frac{U_2}{U_1} = 39\,\mathrm{mA} \cdot \frac{18.37\,\mathrm{V}}{29\,\mathrm{V}} = 24.70\,\mathrm{mA} = \underline{\underline{25\,\mathrm{mA}}}$$

Das Eigenschaftswort “ohmsch” wird in verschiedenen Bedeutungsvarianten verwendet: Der Strom variiert proportional zur Spannung oder der Leiter erhitzt sich, wenn Strom hindurch fliesst.

Zurück zum Formelblatt.

Spezifischer elektrischer Widerstand

Kür

Der elektrische Widerstand eines Drahtes wächst proportional zur Länge l und umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche A. Er hängt über den spezifischen elektrischen Widerstand ρ_{el} vom Leitermaterial ab.

$R = \rho_{\mathrm{el}} \cdot \dfrac{l}{A}$	zweites ohmsches Gesetz
$\rho_{\mathrm{el,Cu}} = 1.78 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$	spezifischer, elektrischer Widerstand von Kupferdraht

Der spezifische elektrische Widerstand ist eine tabellierte Materialgrösse.

Beispiel: Ein Eisendraht ist 180 m lang und hat 5.8 Ω Widerstand. Berechnen Sie seine Querschnittsfläche.

$$A = \frac{\rho_e l}{R} = \frac{11.5 \cdot 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m} \cdot 180\,\mathrm{m}}{5.8\,\Omega} = 3.569 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 = \underline{\underline{3.6\,\mathrm{mm}^2}}$$

Beispiel: Eine Rolle lackierter Kupferdraht von $1.0\,\mathrm{mm}^2$ Querschnittsfläche wiegt 800 g. Berechnen Sie den Widerstand.

$$m = \rho_m V = \rho_m A l$$

$$R = \rho_e \frac{l}{A} = \frac{\rho_e m}{\rho_m A^2} = \frac{1.78 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m} \cdot 0.800\,\mathrm{kg}}{8.92 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (1.0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2)^2} = \underline{\underline{1.6\,\Omega}}$$

Die Masse des Lacks ist vernachlässigt worden.

Der Kehrwert des spezifischen elektrischen Widerstands heisst elektrische Leitfähigkeit ($\sigma = 1/\rho_e$) und hat die Einheit S/m (Siemens pro Meter).

Zurück zum Formelblatt.

Elektrische Leistung

Pflicht

Aus den Definitionen von elektrischer Spannung U, Stromstärke I und Widerstand R folgt für die Leistung P, die ein elektrisches Element aufnimmt:

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

Beispiel: Ein Tauchsieder, der ans Haushaltnetz angeschlossen wird, hat die Nennleistung 800 W. Berechnen Sie die Stromstärke im Betrieb.

Das Haushaltnetz in der Schweiz hat die Nennspannung 230 V.

$$I = \frac{P}{U} = \frac{800\,\mathrm{W}}{230\,\mathrm{V}} = \underline{\underline{3.5\,\mathrm{A}}}$$

Die elektrische Leistung wird als thermische Leistung wieder abgegeben. Der Ausdruck $\Delta Q = P \cdot \Delta t = RI^2 \cdot \Delta t$ heisst Joulesche Wärme.

Beispiel: Ein Präzisionswiderstand von 250 Ω darf nicht mehr als 0.25 W aufnehmen. Berechnen Sie die maximal erlaubte Spannung.

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow U = \sqrt{RP} = \sqrt{250\,\Omega \cdot 0.25\,\mathrm{W}} = \underline{\underline{7.9\,\mathrm{V}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Serieschaltung

Kür

Eine Serie- oder Reihenschaltung von drei Widerständen ist in Abbildung 7 dargestellt.

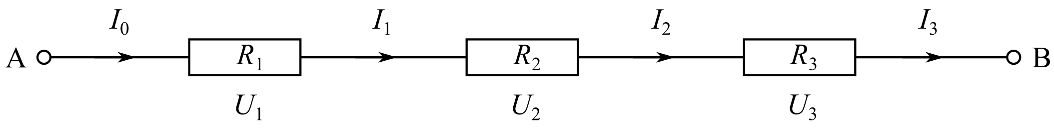


Abbildung 7: Serie- oder Reihenschaltung dreier Widerstandselemente

Beim Anschluss A fliesse ein Strom der Stärke I_0, nach dem ersten Element mit Widerstandswert R_1, an dem die Spannung U_1 anliegt, fliesse der Strom I_1 und so weiter. Zwischen den Anschlüssen A und B messe man die Gesamtspannung U_{AB}.

$$I_0 = I_1 = I_2 = I_3 \quad \text{durch seriell geschaltete Elemente fliesst derselbe Strom}$$
$$U_{AB} = U_1 + U_2 + U_2$$
$$R_{AB} = R_1 + R_2 + R_3$$

Analog für weniger oder mehr seriell geschaltete Elemente.

Beispiel: Durch drei seriell geschaltete Widerstandselemente mit 100 Ω, 200 Ω und 300 Ω fliessen 40 mA.
a) Wie gross ist die Spannung U_1 über dem ersten Widerstand?
b) Wie gross ist die elektrische Leistung, welche der zweite Widerstand aufnimmt?
c) Wie gross ist die Gesamtspannung U_{AB}?

$$\text{a) } U_1 = R_1 I = 100\,\Omega \cdot 0.040\,\text{A} = \underline{\underline{4.0\,\text{V}}}$$
$$\text{b) } P_2 = R_2 I^2 = 200\,\Omega \cdot (0.040\,\text{A})^2 = \underline{\underline{0.32\,\text{W}}}$$
$$\text{c) } U_{AB} = R_{AB} I = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot I = (100\,\Omega + 200\,\Omega + 300\,\Omega) \cdot 0.040\,\text{A} = \underline{\underline{24\,\text{V}}}$$

Beispiel: An zwei seriell geschalteten Widerständen R_1 und R_2 liegt die Gesamtspannung U_{AB} an. Wie gross sind die Einzelspannungen U_1 und U_2 an den Widerständen?

$$U_1 = R_1 I_1 = R_1 I = R_1 \cdot \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = R_1 \cdot \frac{U_{AB}}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_{AB} \quad \text{und analog}$$
$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{AB}$$

Bei einer Serieschaltung teilt sich die Spannung im gleichen Verhältnis wie die Widerstandswerte auf.

Zurück zum Formelblatt.

Parallelschaltung

Kür

Eine Parallelschaltung von drei Widerständen ist in Abbildung 8 dargestellt.

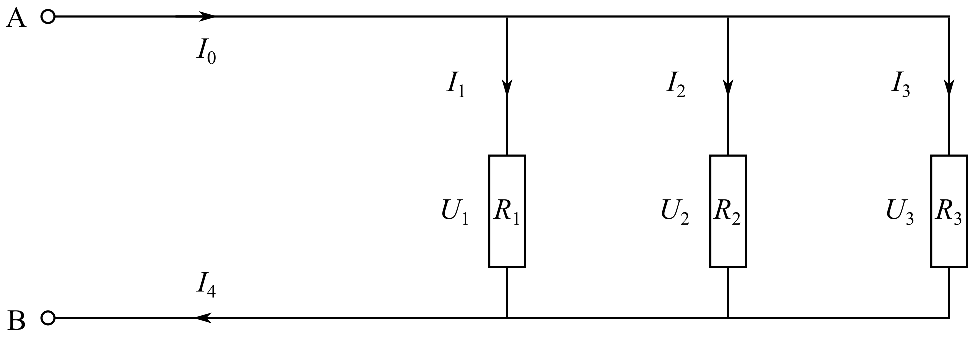


Abbildung 8: Paralllelschaltung dreier Widerstandselemente

Beim Anschluss A fliesse ein Strom der Stärke I_0. Durch das erste Element mit Widerstandswert R_1, an dem die Spannung U_1 anliegt, fliesse der Strom I_1 (analog U_2, I_2 etc.). Beim Anschluss B fliesse der Strom I_4. Zwischen den Anschlüssen A und B messe man die Gesamtspannung U_{AB}.

$$U_{AB} = U_1 = U_2 = U_3 \quad \text{an seriell geschalteten Elementen liegt dieselbe Spannung an}$$

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = I_4$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Analoges gilt für mehr oder weniger parallel geschaltete Elemente.

Beispiel: An drei parallel geschalteten Widerständen mit $100\,\Omega$, $200\,\Omega$ und $300\,\Omega$ liegt eine Spannung $U_{AB} = 60\,\text{V}$ an.
a) Wie gross ist der Strom durch den ersten Widerstand?
b) Welche Leistung nimmt der zweite Widerstand auf?
c) Wie gross ist der Gesamtstrom I_0?

$$\text{a) } I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_{AB}}{R_1} = \frac{60\,\text{V}}{100\,\Omega} = \underline{\underline{0.60\,\text{A}}}$$

$$\text{b) } P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{(60\,\text{V})^2}{200\,\Omega} = \underline{\underline{18\,\text{W}}}$$

$$\text{c) } I_0 = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = U_{AB} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 60\,\text{V} \cdot \left(\frac{1}{100\,\Omega} + \frac{1}{200\,\Omega} + \frac{1}{300\,\Omega}\right) = \underline{\underline{1.1\,\text{A}}}$$

Beispiel: Durch zwei parallel geschaltete Widerstände R_1 und R_2 fliesst der Gesamtstrom I_0. Wie gross sind die Einzelströme durch die Einzelwiderstände?

$$I_0 = I_1 + I_2$$

$$U_1 = R_1 I_1 = R_2 I_2 = U_2 \qquad \text{Gleichungssystem für die Ströme}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_0 \qquad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I_0$$

Bei einer Parallelschaltung teilt sich der Strom im umgekehrten Verhältnis der Widerstandswerte auf.

Zurück zum Formelblatt.

Magnetische Kraft auf einen Leiter

Kür

Ein gerader Leiter der Länge l, der vom Strom I durchflossen wird, erfährt in einem homogenen Magnetfeld der Stärke B (Flussdichte oder magnetische Induktion) eine Kraft F der Stärke

$$F = IlB \sin\alpha \quad \text{(Betrag)} \qquad\qquad \vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) \quad \text{(Vektorprodukt)}$$

Der Winkel α wird zwischen dem Feldstärkevektor $\vec{B}$ (resp. der Feldlinie) und dem Leiterstück $\vec{l}$, das in die technische Stromrichtung zeigt, gemessen.

Die Kraft wirkt senkrecht zum Leiterstück und senkrecht zur Feldlinie. Die verbleibenden zwei Möglichkeiten werden durch die *rechte-Hand-Regel* entschieden: Man halte den Daumen der rechten Hand parallel zur technischen Stromrichtung ($\vec{l}$), den Zeigefinger parallel zur Feldlinie ($\vec{B}$), dann zeigt der Mittelfinger die Kraftrichtung ($\vec{F}$) an.

Diese Beziehung legt die Einheit der magnetischen Flussdichte B fest (Tesla) und legt eine Messvorschrift nahe: Die magnetische Induktion B ist die magnetische Kraft F auf einen geraden Leiter der Länge l, der senkrecht zu den magnetischen Feldlinien orientiert ist, pro Stromstärke I und pro Leiterlänge l. Damit folgt $1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{N/(A \cdot m)}$.

Beispiel: Ein Draht der Länge 5.5 cm wird unter einem Winkel von 48° zu den Feldlinien in ein Magnetfeld der Stärke 0.084 T gehalten und von 3.9 A durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Kraft auf den Draht.

$$F = IlBsin\alpha = 3.9\,\mathrm{A} \cdot 5.5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot 8.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T} \cdot \sin 48^\circ \;= \underline{\underline{24\,\mathrm{mN}}}$$

Die Bezeichnungen sind nicht einheitlich: B wird magnetische Flussdichte oder magnetische Induktion genannt, gelegentlich auch magnetische Feldstärke. Die Grösse H in $B = \mu_r\mu_0 H$ wird oft magnetische Feldstärke, aber auch magnetische Erregung genannt.

Zurück zum Formelblatt.

Lorentzkraft

Pflicht

Ein Teilchen mit Ladung q bewege sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein elektromagnetisches Feld. Es erfährt die magnetische Kraft $\vec{F}_L$.

$F_L = |q|vB\sin\alpha$ Betrag des magnetischen Teils der Lorentzkraft

Der Winkel α wird zwischen dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ und dem Flussdichtevektor $\vec{B}$ gemessen. Die magnetische Kraft wirkt senkrecht zu $\vec{v}$ und $\vec{B}$. Der Richtungssinn kann durch die *rechte-Hand-Regel* entschieden werden: Daumen der rechten Hand parallel zu $\vec{v}$, Zeigefinger in Richtung $\vec{B}$, dann zeigt der Mittelfinger die Richtung von $\vec{F}_L$ an (für ein elektrisch positives Teilchen, sonst umgekehrt).

Beispiel: Wenn sich ein Proton mit $9.3 \cdot 10^6$m/s senkrecht zu den Feldlinien durch ein Magnetfeld der Stärke 0.83 T bewegt, so beschreibt es eine Kreisbahn. Berechnen Sie den Bahnradius.

$$F_{\text{res}} = ma_z$$
$$evB = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} = \frac{1.673 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot 9.3 \cdot 10^6\,\text{m/s}}{1.6022 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 0.83\,\text{T}} = \underline{\underline{12\,\text{cm}}}$$

Vektorielle Schreibweise: Kür

$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) + q \cdot \vec{E}$ vollständige Lorentzkraft inklusive elektrischer Kraft

Zurück zum Formelblatt.

Magnetfeld eines geraden Stromleiters

Kür

Ein elektrischer Strom der Stärke I, der durch einen sehr langen, geraden, dünnen Leiter fliesst, erzeugt im Abstand r von der Leiterachse im Vakuum ein Magnetfeld mit Flussdichte B.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\mu_0 = 1.256\,637\,062\,12(19) \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}} \quad \text{magnetische Feldkonstante}$$

Beispiel: Ein rundes Starkstromkabel wird von 650 A durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Induktion B in 8 cm Abstand von der Drahtachse.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{1.2566 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs/(Am)} \cdot 650\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 1.62 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T} = \underline{\underline{2\,\mathrm{mT}}}$$

Beispiel: Zwei unendlich lange Leiter vernachlässigbaren Querschnitts laufen parallel in genau einem Meter Abstand und werden von zwei Strömen mit je genau einem Ampere Stärke durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Kraft pro Meter Leiterlänge auf einen Leiter.

$$F = I_1 l B_2 \sin\alpha = I_1 l \cdot \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r} = \frac{1.2566 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs/(Am)}}{2\pi} \cdot \frac{1\,\mathrm{A} \cdot 1\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{m}} = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/m}$$

Auf dieser Rechung – in anderer Richtung gelesen – beruhte bis 2018 die SI-Definition der Einheit Ampere. Der Zweck der Definition war es, der magnetischen Feldkonstanten den festen Wert $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{As/(Vm)}$ zuzuweisen. Bei der Neudefinition (2018) ist aus der magnetischen Feldkonstanten wieder eine Messgrösse geworden, dafür hat neu die Elementarladung einen definierten Wert.

Zurück zum Formelblatt.

Magnetfeld einer Zylinderspule

Kür

Eine schlanke, eng gewickelte Zylinderspule der Länge l mit N Drahtwindungen, die mit dem Strom I belegt sind, weist in ihrem Inneren ein homogenes Magnetfeld der Stärke B auf:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

Die Zylinderspule heisst auch Solenoid (röhrenförmige Spule).

Beispiel: Eine schlankes Solenoid wird von 4.2 A durchflossen. Im Innern wird eine Feldstärke von 38 mT registriert. Berechnen Sie die Windungsdichte N/l.

$$\frac{N}{l} = \frac{B}{\mu_0 I} = \frac{38 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}}{1.2566 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs/(Am)} \cdot 4.2\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{7.2\,\mathrm{mm}^{-1}}}$$

Bemerkungen

Kür

Kann die Spule nicht mehr als schlank betrachtet werden, so variiert die Feldstärke entlang der Spulenachse. Im Zentrum eines Solenoids mit Durchmesser d ist

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\sqrt{l^2 + d^2}}$$

Dieser Ausdruck kann auch auf den Fall eines Kreisstromes spezialisiert werden.

Ist die Spule oder ist der Leiter in ein magnetisches Material eingebettet, so wird das Magnetfeld (meist nichtlinear) verstärkt. Statt der magnetischen Feldkonstanten ist die Grösse $\mu = \mu_r \mu_0$ zu schreiben. Die sogenannte Permeabilitätszahl μ_r ist eine Materialgrösse. Für Vakuum ist μ_r per Definition Eins, für unmagnetische Stoffe ist $\mu_r \approx 1$.

Zurück zum Formelblatt.

Faradaysches Induktionsgesetz

Pflicht

Kür

Wird eine offene Leiterschleife von einem zeitlich variierenden, magnetischen Fluss Φ_m durchsetzt, so kann an den Enden der Leiterschleife eine Induktionsspannung U_{ind} gemessen werden:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\Phi_m = B_\perp A \rightarrow \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad \text{magnetischer Fluss}$$

Wenn die Fläche eben und das Magnetfeld homogen ist, kann der magnetische Fluss als Produkt aus Flächeninhalt A und der Komponente $B_\perp$ der Flussdichte senkrecht zur Fläche berechnet werden.

In einer geschlossenen Leiterschleife treten *Induktionsströme* auf, welche Rückwirkungen auf den magnetischen Fluss haben und deshalb schwierig zu berechnen sind (Selbstinduktion). Das negative Vorzeichen im Induktionsgesetz weist darauf hin, dass diese Induktionsströme so gerichtet sind, dass sie ihrer Ursache entgegen wirken (Lenz'sche Regel).

Beispiel: Eine offene Leiterschleife mit 80 Windungen und 2.9 cm^2 Fläche pro Windung rotiere gleichmässig mit 50 Hz in einem Magnetfeld der Stärke 0.23 T. Wie gross ist die induzierte Spannung maximal?

$$\Phi_m = NAB\sin(\omega t) = NAB\sin(2\pi f t)$$

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -2\pi f NAB\cos(2\pi f t)$$

Maximum: $2\pi f NAB = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 80 \cdot 2.9 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot 0.23\,\text{T} = \underline{\underline{1.7\,\text{V}}}$

Beispiel: Eine offene Leiterschleife der Fläche 1.9 km^2 wird senkrecht von einem Magnetfeld durchsetzt, das in 15 min gleichmässig um 3.1 nT abnimmt. Berechnen Sie die Induktionsspannung.

$$\Phi_m = A \cdot \left(B_0 - \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot t\right)$$

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = 1.9 \cdot 10^6\,\text{m}^2 \cdot \frac{3.1 \cdot 10^{-9}\,\text{T}}{15 \cdot 60\,\text{s}} = \underline{\underline{6.5\,\mu\text{V}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Harmonische Wechselspannung

Die Spannung an einer Haushaltsteckdose hat in guter Näherung folgenden zeitlichen Verlauf: Kür

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie bei der harmonischen Schwingung. Wird diese Spannung an einen ohmschen Widerstand angelegt, so fliesst ein harmonischer Wechselstrom gleicher Frequenz und Phase.

Der *Effektivwert* der Wechselspannung ist jene mittlere Spannung, welche dieselbe mittlere Heizleistung an einem ohmschen Widerstand bewirkt wie die harmonische Wechselspannung. Da $P(t) = u^2(t)/R$ gilt, ist der Effektivwert ein quadratischer Mittelwert (rms: root-mean-square). Für eine harmonische Wechselspannung folgt dann Pflicht

$$U_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

und analog für einen harmonischen Wechselstrom. Rechnet man mit Effektivwerten, so können die Formeln $P = RI^2 = U^2/R$ aus der Gleichstromlehre übernommen werden.

Beispiel: Unser Haushaltnetz hat die Nennwerte 230 V und 50.0 Hz. Berechnen Sie die Spannungsamplitude und die Kreisfrequenz.

$$\hat{u} = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 230\,\text{V} = \underline{\underline{325\,\text{V}}}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50.0\,\text{Hz} = \underline{\underline{314\,\text{s}^{-1}}}$$

Beispiel: Ein Wasserkocher, der ans Haushaltnetz angeschlossen wird, ist mit 1.9 kW angeschrieben. Berechnen Sie den effektiven und den Spitzenstrom.

$$P = UI \Rightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{1.9 \cdot 10^3\,\text{W}}{230\,\text{V}} = \underline{\underline{8.3\,\text{A}}}$$

$$\hat{\imath} = \sqrt{2} \cdot I = \frac{\sqrt{2}P}{U} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1.9 \cdot 10^3\,\text{W}}{230\,\text{V}} = \underline{\underline{12\,\text{A}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Harmonische Schwingung

Pflicht

Die harmonische Schwingung ist ein Vorgang, z.B. die geradlinige Bewegung eines Punktes um einen Nullpunkt, die mit folgender Gleichung beschrieben werden kann:

$y(t) = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi_0)$	Bahngleichung
	wobei
$y = y(t)$	Momentanwert, ‘Elongation’
$\hat{y}$	Spitzenwert, Amplitude
ω	Kreisfrequenz in s^{-1}
t	Zeitpunkt
φ_0	Anfangs-, Start- oder Nullphase
$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$	momentane Phase in Radiant

Die harmonische Schwingung eines Punktes kann als Komponente einer gleichmässigen Kreisbewegung aufgefasst werden. Deshalb gilt die Beziehung $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ auch hier; lediglich die Namen haben gewechselt: Die Grösse ω heisst Kreisfrequenz statt Winkelgeschwindigkeit und die Grösse T heisst Schwingungsdauer (zeitliche Periode) statt Umlaufzeit.

Beispiel: Eine harmonische Schwingung startet aus der Nulllage in die positive Richtung, hat Amplitude 1.83 µm und Schwingungsdauer 3.30 ms. Berechnen Sie den Momentanwert 2.63 ms nach dem Start.

$$y = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi_0) \rightarrow y = \hat{y}\sin(\omega t) = \hat{y}\sin\frac{2\pi t}{T} = 1.83\,\mu\mathrm{m}\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 2.63\,\mathrm{ms}}{3.30\,\mathrm{ms}} = \underline{\underline{-1.75\,\mu\mathrm{m}}}$$

Vergessen Sie nicht, den Taschenrechner auf Bogenmass (Radiant) umzustellen!

Beispiel: Was ist der Unterschied, wenn die harmonische Schwingung mit Kosinus und statt mit Sinus dargestellt wird?

Kosinus und Sinus sind lediglich verschoben gegen einander: $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$. Folglich hat nur die Startphase einen anderen Zahlenwert.

Beispiel: Eine harmonische Schwingung $y = \hat{y}\cos(\omega t + \varphi_0)$ hat Frequenz 237 kHz. Der erste Nulldurchgang in Abwärtsrichtung findet zum Zeitpunkt $t = 3.821$ µs statt. Berechnen Sie die Startphase φ_0.

Der Kosinus hat die erste Nullstelle bei $\pi/2$. Also gilt für die momentane Phase

$$\omega t + \varphi_0 = \pi/2 \Rightarrow \varphi_0 = \pi/2 - t\cdot 2\pi f = \pi/2 - 3.821\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}\cdot 2\pi\cdot 237\cdot 10^{3}\,\mathrm{Hz} = \underline{\underline{-4.12\,\mathrm{rad}}}$$

Die Phase ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt, $2\pi - 4.12$ rad, $8\pi - 4.12$ rad und so weiter wären auch gültige Lösungen.

Nicht jede Schwingung ist harmonisch: Periodische Schwingungen sind die Dreieck-, Rechteck- und Sägezahnschwingung. Die gedämpfte Schwingung ist nicht periodisch.

Zurück zum Formelblatt.

Federpendel

Pflicht

Die Schwingungsdauer oder Periodendauer T eines Federpendels ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

wobei m die angehängte (oder effektive) Masse und D (manchmal k) die Federkonstante der Feder ist. Von der Dämpfung (Reibung) wird abgesehen.

Beispiel: Ein Körper von 200 g Masse wird an eine Feder mit vernachlässigbarer Eigenmasse gehängt. Dieses Federpendel hat eine Schwingungsdauer von 1.8 s. Berechnen Sie die Federkonstante.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = m\omega^2 = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0.200\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{2\pi}{1.8\,\mathrm{s}}\right)^2 = \underline{\underline{2.4\,\mathrm{N/m}}}$$

Beispiel: Die Masse eines Federpendels wird 10 % erhöht. Was passiert mit der Schwingungsdauer?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \propto \sqrt{m} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{100\,\% + 10\,\%}{100\,\%}} = \sqrt{1.10} = 1.05$$

Die Periodendauer erhöht sich um 5 %.

Zurück zum Formelblatt.

Mathematisches Pendel

Kür

Das mathematische Pendel ist ein idealisiertes Faden- oder Stangenpendel: Ein Massenpunkt hängt an einer starren, masselosen, reibungsfreien Stange. Die Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels der Länge l an einem Ort mit Fallbeschleunigung g ist bei kleiner Amplitude:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Beispiel: Berechnen Sie die Frequenz eines Fadenpendels der Länge 17 cm.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.81\,\mathrm{m/s^2}}{0.17\,\mathrm{m}}} = \underline{\underline{1.2\,\mathrm{Hz}}}$$

Beispiel: Ein Sekundenpendel ist ein (mathematisches) Pendel, bei dem eine Halbschwingung exakt eine Sekunde dauert. Wie muss die Länge des Sekundenpendels angepasst werden, wenn es an einen Ort mit 0.8 Promille tieferer Fallbeschleunigung gebracht wird?

$$2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g_2}} = T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}} \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{g_2}{g_2}$$

Die Länge des Sekundenpendels muss um 0.8 Promille verkürzt werden.

Zurück zum Formelblatt.

Reflexions- und Brechungsgesetz

Pflicht

Trifft ein Lichtstrahl auf die ebene Grenzfläche zweier unterschiedlicher Medien, so wird ein Teil des Lichtes reflektiert und ein Teil gebrochen (Refraktion), siehe Abbildung 9.

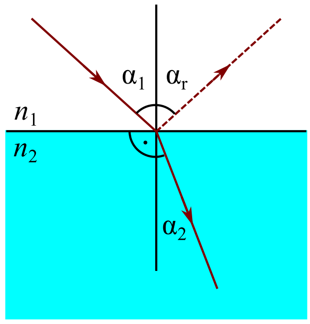


Abbildung 9: Trifft ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier Medien mit Brechungsindices n_1 und n_2, so starten der reflektierte und der gebrochene Strahl im Auftreffpunkt. Diese zwei Strahlen liegen in derselben Ebene wie der Einfallsstrahl und die Senkrechte auf die Grenzfläche im Auftreffpunkt. Einfallswinkel α_1, Reflexionswinkel α_r und Brechungswinkel α_2 werden zur Senkrechten gemessen.

Das Experiment zeigt:

$$\alpha_r = \alpha_1 \qquad \text{Reflexionsgesetz}$$

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 \qquad \text{Brechungsgesetz von Snellius}$$

Die Brechungsindices sind tabelliert. Sie hängen stark vom Material und schwach von der Frequenz (Wellenlänge, “Farbe” des Lichts) ab.

Beispiel: Ein Lichtstrahl trifft unter einem Winkel von 37,8° auf eine Grenzfläche Luft → Wasser. Berechnen Sie den Brechungswinkel.

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1\right) = \arcsin\left(\frac{1.000}{1.333}\sin 37,8^\circ\right) = \underline{\underline{27,4^\circ}}$$

Beispiel: Ein Lichtstrahl trifft und einem Winkel von 73,8° auf eine Grenzfläche Wasser → Luft. Berechnen Sie den Brechungswinkel.

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1\right) = \arcsin\left(\frac{1.333}{1.000}\sin 73,8^\circ\right) = \arcsin(1.28) \notin \mathbb{R}$$

Das Brechungsgesetz liefert keine reelle Lösung für den Brechungswinkel, also muss alles Licht reflektiert werden (Totalreflexion).

Das Reflexionsgesetz gilt auch z.B. bei der elastischen Reflexion harter Kugeln oder der Reflexion von Wasserwellen an einer Hafenmauer. Kür

Das Brechungsgesetz gilt auch für andere Wellen, wenn das Brechungsgesetz entsprechend geschrieben wird. Der absolute Brechungsindex n_i eines Materials i ist das Verhältnis von Vakuumlichtgeschwindigkeit c zur Lichtgeschwindigkeit c_i im Material i, also $n_i = c/c_i$. Mit Hilfe dieser Beziehung kann das Brechungsgesetz durch die Wellengeschwindigkeiten ausgedrückt werden:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Zurück zum Formelblatt.

Abbildungsgesetze

Pflicht

Ein Gegenstand werde durch eine Linse oder einen Spiegel mit Brennweite f abgebildet, siehe Abb. 10.

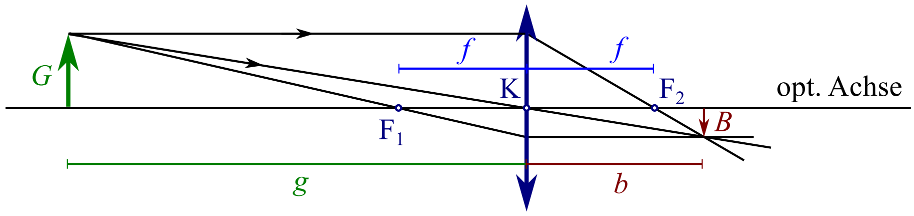


Abbildung 10: Lichtstrahlen, die von einem Punkt des Gegenstandes ausgehen, werden durch die Linse so gebrochen, dass sie durch einen Punkt in der Bildebene laufen. Dort kann man auf einem Bildschirm ein scharfes Bild beobachten. Die Bezeichnungen lauten Gegenstandsgrösse G, Gegenstandsweite g, Bildgrösse B, Bildweite b, Brennpunkte F_1 und F_2 (Fokusse), Brennweite f, Knotenpunkt K und optische Achse (durch die Brennpunkte).

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \qquad\qquad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Das Verhältnis $B : G$ heisst Abbildungsmassstab.

Beispiel: Ein Gegenstand steht 2.8 m vor einer Linse mit 80 mm Brennweite. Berechnen Sie die Bildweite und den Abbildungsmassstab.

$$b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{0.080\,\mathrm{m}} - \frac{1}{2.8\,\mathrm{m}}\right)^{-1} = 82.35\,\mathrm{mm} = \underline{\underline{82\,\mathrm{mm}}}$$
$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{f}{g-f} = \frac{80\,\mathrm{mm}}{2800\,\mathrm{mm} - 80\,\mathrm{mm}} = 0.0294 = 1 : 34$$

Die oben genannten Gesetze gelten für dünne Linsen, wenn auf beiden Seiten der Linse dasselbe Medium ist, z.B. Luft. Die Abbildungsgesetze einer Sammellinse können auch auf Hohlspiegel angewendet werden. Sie können auch auf Zerstreuungslinsen und Wölbspiegel übertragen werden, indem man eine negative Brennweite setzt.

Zurück zum Formelblatt.

Harmonische Welle

Kür

Eine Welle ist eine Funktion von Ort und Zeit: $u(x,t)$. Das Grundmodell ist die harmonische Welle (Sinuswelle, siehe Abbildung 11).

$u(x,t) = \hat{u}\sin(kx - \omega t)$	laufende harmonische Welle, siehe Abb. 12
$u(x,t) = \hat{u}\cos(kx)\sin(\omega t)$	stehende harmonische Welle, siehe Abb. 13
$u(x,t)$	ortsabhängiger Momentanwert
$\hat{u}$	Amplitude
$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$	Kreiswellenzahl
$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	Kreisfrequenz
$\varphi(x,t) = kx - \omega t \quad (+\varphi_0)$	momentane Phase der laufenden Welle in Radiant

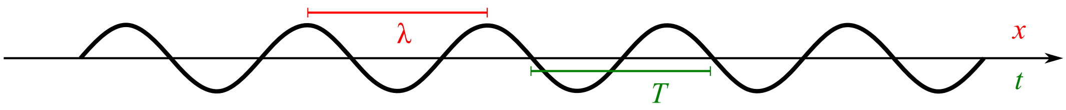


Abbildung 11: Eine Sinuswelle sieht im Orts- und Zeitbild gleich aus. Im Ortsbild wird der Momentanwert $u(x,t_0)$ als Funktion der Ortskoordinate x zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 aufgetragen. Die räumliche Periode heisst Wellenlänge λ (Lambda). Im Zeitbild wird der Momentanwert $u(x_0,t)$ als Funktion der Zeit t aufgetragen, wenn die Welle an einem bestimmten Ort x_0 vorbeiläuft. Der zeitliche Verlauf ist eine harmonische Schwingung mit Schwingungsdauer (Periode) T.

Abbildung 12: Eine laufende, harmonische Welle verschiebt sich in die positive oder negative x-Richtung, ohne ihre Form zu ändern.

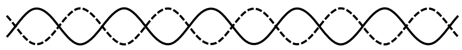


Abbildung 13: Bei einer stehenden Welle bleiben die Nullstellen (Knoten) fix und die "Bäuche" schwingen harmonisch.

Laufende Wellen werden gebraucht, um die Ausbreitung von Schall- oder Mikrowellen zu beschreiben. Stehende Wellen werden gebraucht, um die Bewegung einer Violinsaite darzustellen. Im Zeitbild, siehe Abbildung 11, erscheinen beide Wellen als harmonische Schwingung.

Beispiel: Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die Nullstellen einer laufenden Sinuswelle?

Bei der (z.B.) ersten Nullstelle hat die momentane Phase immer den Wert π, d.h.

$$kx - \omega t = \pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{k} + \frac{\omega}{k}\cdot t \qquad \text{zu vergleichen mit}$$

$$s = s_0 + v\cdot t \quad \Rightarrow \quad v = \omega/k$$

Zurück zum Formelblatt.

Wellengeschwindigkeit, Frequenz und Wellenlänge

Pflicht

Eine laufende harmonische Welle mit Frequenz f bewegt sich während einer Schwingungsdauer T eine Wellenlänge λ vorwärts. Somit gilt für die Wellengeschwindigkeit c:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

$c = 2.997\,924\,58 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$ Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, exakt im SI

$c_S = 344\ \mathrm{m/s}$ Schallgeschwindigkeit in Luft bei 20 °C

Beispiel: Welche Wellenlänge hat die Strahlung in einem Mikrowellenofen mit Frequenz 2.4 GHz?
Mikrowellen sind elektromagnetische Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{2.4 \cdot 10^9\ \mathrm{Hz}} = \underline{\underline{13\ \mathrm{cm}}}$$

Beispiel: Welche Frequenz hat eine Schallwelle mit Wellenlänge 15 cm?
Wir nehmen Schallwellen in Luft an.

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{344\ \mathrm{m/s}}{0.15\ \mathrm{m}} = \underline{\underline{2.3\ \mathrm{kHz}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Beugung

Kür

Beugung und Interferenz sind charakteristische Wellenphänomene. *Interferenz* tritt auf, wenn sich zwei gleichartige Wellen im selben Raumgebiet überlagern: Die Wellen können sich gegenseitig auslöschen (destruktive Interferenz) oder verstärken (konstruktive Interferenz). *Beugung* tritt auf, wenn Wellen auf Kanten oder Hindernisse treffen. Für die Messtechnik besonders interessant ist die Beugung einer Welle an einem periodischen Strichgitter, siehe Abbildungen 14 und 15.

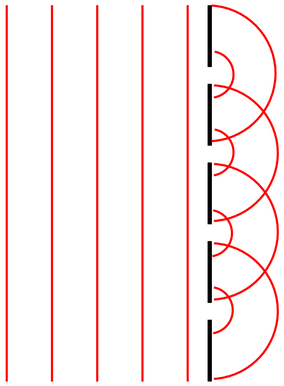


Abbildung 14: Eine ebene (harmonische) Welle mit Wellenlänge λ trifft senkrecht auf ein periodisches Strichgitter. Hinter den Gitterspalten treten Elementarwellen aus, die im Raum hinter dem Gitter in bestimmte Richtungen konstruktiv interferieren.

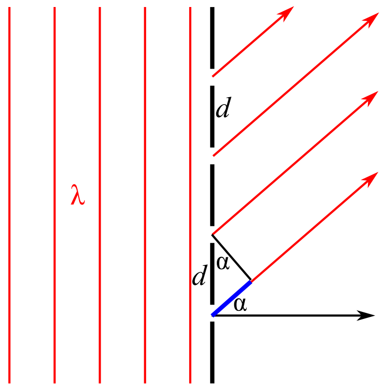


Abbildung 15: Die Elementarwellen hinter den Spalten interferieren in jene Richtungen α konstruktiv, in denen die Weglängenunterschiede $d \sin\alpha$ ein ganzzahliges Vielfaches $m\lambda$ der Wellenlänge λ sind.

Zur Erklärung der Beugung kann das Prinzip von Huygens-Fresnel zu Hilfe gezogen werden: Jede Welle kann in Elementarwellen zerlegt werden und jede Welle lässt sich aus Elementarwellen zusammensetzen. Die Spalte des Gitters lassen nur eine Auswahl an Elementarwellen passieren, die anschliessend interferieren. Die Elementarwellen sind in Abb. 14 als Kugel- resp. Ringwellen gezeichnet.

$$d \sin\alpha_m = m \cdot \lambda \qquad m \in \mathbb{Z} \qquad \text{Gitterbeugungsgleichung}$$

In die Richtungen α_m (Beugungswinkel) wird der grösste Teil der Wellen abgelenkt, in die anderen Richtungen nichts. Die ganze Zahl m heisst Beugungsordnung.

Beispiel: Licht der Wellenlänge 489 nm fällt senkrecht auf ein Beugungsgitter mit Gitterperiode $d = 1.293\,\mu\text{m}$. Berechnen Sie alle Beugungswinkel.

$$
\begin{aligned}
& d \sin\alpha_m = m\lambda \Rightarrow \alpha_m = \arcsin\frac{m\lambda}{d} \\
& \alpha_0 = 0 \\
& \alpha_1 = \arcsin\frac{1 \cdot 489\,\text{nm}}{1293\,\text{nm}} = 22.2^\circ \qquad \alpha_{-1} = -22.2^\circ \\
& \alpha_2 = \arcsin\frac{2 \cdot 489\,\text{nm}}{1293\,\text{nm}} = 49.1^\circ \qquad \alpha_{-2} = -49.1^\circ \\
& \alpha_3 = \arcsin\frac{3 \cdot 489\,\text{nm}}{1293\,\text{nm}} \notin \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Zurück zum Formelblatt.

Schallpegel

Kür

Der Schallpegel ist eingeführt worden, um ein Lautstärkemass zu haben, das in etwa unsere Empfindung wiedergibt. Physikalisch könnte man sich mit der Schallstärke J (in W/m^2) zufrieden geben.

$$L = 10 \cdot \lg_{[10]} \frac{J}{J_0} \qquad J_0 = 10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

$[L] = 1\,\mathrm{dB}$ Dezibel

Der Schallpegel ist der Zehnerlogarithmus eines Schallstärkeverhältnisses. J_0 ist ungefähr die menschliche Hörschwelle bei 1 kHz. Bei anderen Frequenzen kann man elektronische Filter verwenden (→ dB(A)), um die Frequenzabhängigkeit unserer Hörempfindung zu simulieren.

Beispiel: Ein Signal hat die Schallstärke $2.4{\cdot}10^{-4}$ W/m^2. Berechnen Sie den Schallpegel.

$$L = 10 \cdot \lg \frac{J}{J_0} = 10 \cdot \lg \frac{2.4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}} = \underline{\underline{84\,\mathrm{dB}}} \quad \text{Dezibel}$$

Beispiel: Was passiert mit dem Schallpegel, wenn der Abstand zur (kleinen) Schallquelle verdoppelt wird?

$$J = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

$$L_2 - L_1 = 10 \cdot \lg \frac{J_2}{J_0} - 10 \cdot \lg \frac{J_1}{J_0} = 10 \cdot \lg \frac{J_2}{J_1} = 10 \cdot \lg \frac{r_1^2}{r_2^2} = 20 \cdot \lg \frac{r_1}{r_2} = 20 \lg \frac{1}{2} = -6.02\,\mathrm{dB}$$

Der Schallpegel nimmt sechs Dezibel ab, wenn der Abstand zur Quelle verdoppelt wird.

Zurück zum Formelblatt.

Zerfallsgesetz

Kür

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}} \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Das Zerfallsgesetz beschreibt, wie die Anzahl Atome $N(t)$ eines bestimmten, radioaktiven Nuklids in einer Probe mit der Zeit abnimmt. N_0 ist die Anzahl Mutterkerne zu Beginn des betrachteten Zeitraums, $N(t)$ ist der Erwartungswert zu einem späteren Zeitpunkt t. Die Stoffgrösse $T_{1/2}$ heisst *Halbwertszeit*; sie ist tabelliert und ist gleich der Zeit, in der durchschnittlich die Hälfte eines anfangs vorhandenen Nuklids zerfallen ist. Die Grösse λ heisst Zerfallskonstante. Manchmal wird an ihrer Stelle auch die Lebensdauer $\tau = 1/\lambda$ verwendet.

1. Beispiel: Eine Probe enthält $7.5 \cdot 10^{16}$ Strontium-90 Atome. Wie viele dieser Atome sind nach 20 Jahren noch vorhanden? Sr-90 hat eine Halbwertszeit von 28.79 Jahren.

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}} = 7.5 \cdot 10^{16} \cdot 2^{-20\,\mathrm{a}/28.79\,\mathrm{a}} = \underline{\underline{4.6 \cdot 10^{16}}}$$

2. Beispiel: Wie lange muss man warten, bis nur noch 1.00 % des ursprünglich in der Probe vorhandenen Cs-137 übrig ist?

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}} \Rightarrow t = -\frac{T_{1/2}}{\log 2} \cdot \log \frac{N}{N_0} = -\frac{30.1671\,\mathrm{a}}{\log 2} \cdot \log 0.0100 = \underline{\underline{200\,\mathrm{a}}}$$

Die Ursache der Radioaktivität ist der Zerfall instabiler Atomkerne gewisser Nuklide. Diese Atomkerne wandeln sich unter Abgabe energiereicher (ionisierender) Strahlung in stabilere Atomkerne um. Die wichtigsten Zerfallsarten sind α-, β- und γ-Zerfall. Beispiele: Pflicht

α-Zerfall	${}^{220}_{86}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{216}_{84}\mathrm{Po} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$
β-Zerfall	${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + e^-$
γ-Zerfall	${}^{99m}_{43}\mathrm{Tc} \rightarrow {}^{99}_{43}\mathrm{Tc} + \gamma$

Beim Alphazerfall wird ein Alphateilchen (He-4 Atomkern) ausgestossen, beim Betazerfall ein Betateilchen (Elektron) und beim Gamma-Übergang ein Gammateilchen (Photon). Beim Betazerfall gibt es Varianten (Positronenemission, Elektroneneinfang).

Zurück zum Formelblatt.

Aktivität

Kür

Die Aktivität A einer Probe ist gleich der Anzahl radioaktiver Zerfälle, die pro Zeit darin stattfinden. Aus dem Zerfallsgesetz $N(t)$ lässt sich die Aktivität der Probe berechnen.

$$A = \frac{\Delta N}{\Delta t} = -\frac{dN(t)}{dt} \qquad [A] = 1\,\mathrm{s}^{-1} = 1\,\mathrm{Bq}\ \text{(Becquerel)}$$

$$A = \lambda \cdot N(t) \qquad \text{für ein einzelnes Nuklid}$$

Beispiel: Wie gross ist die Aktivität von 1.0 mol Uran-238?

$$A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot nN_A = \frac{\ln 2 \cdot 1.0\,\mathrm{mol} \cdot 6.022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}}{4.468 \cdot 10^{9}\,\mathrm{a} \cdot 3.157 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s/a}} = \underline{\underline{3.0\,\mathrm{MBq}}}$$

Beispiel: 1.0 g Radium-226 hat eine Aktivität von 37 GBq. Berechnen Sie die Halbwertszeit.

$$A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{m_a} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{A} \cdot \frac{m}{m_a}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2 \cdot 1.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{37 \cdot 10^{9}\,\mathrm{Bq} \cdot 226.0\,\mathrm{u} \cdot 1.661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/u}} = 4.99 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s} \cdot \frac{1\,\mathrm{a}}{3.156 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{1.6 \cdot 10^{3}\,\mathrm{a}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Dosis

Kür

$$D = \frac{E}{m} \qquad \text{Energiedosis}$$

$$[D] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = \mathrm{Gy} \qquad \text{Einheit: Gray}$$

Die *Energiedosis* D ist die Energie E pro Masse m, die von *ionisierender* Strahlung in lebendem Gewebe deponiert worden ist.

Beispiel: Ein 'Standardmensch' von 75 kg Masse weist eine Aktivität von etwa 5 kBq aufgrund von natürlichem Kalium-40 auf. Schätzen Sie die daraus resultierende, jährliche Energiedosis ab.

Die Halbwertszeit von K-40 ist so gross, dass die Aktivität während eines Jahres nicht merklich abnimmt. Beim radioaktiven Zerfall von K-40 wird laut Tabellenwerk (zu 90 %) Betastrahlung mit 1.311 MeV Energie frei gesetzt. Ein Jahr dauert $3.156 \cdot 10^7$ s. Wenn wir annehmen, dass diese Energie im Körper deponiert wird, folgt

$$E = NE_1 = AtE_1 \quad \text{Die deponierte Energie ist die Anzahl Zerfälle mal die Energie eines Zerfalls}$$

$$D = \frac{E}{m} = \frac{AtE_1}{m} = \frac{5 \cdot 10^3\,\mathrm{Bq} \cdot 3.156 \cdot 10^7\,\mathrm{s} \cdot 1.311\,\mathrm{MeV} \cdot 1.6022 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J/MeV}}{75\,\mathrm{kg}} = \underline{\underline{0.4\,\mathrm{mGy}}}$$

In der Medizin wird ein Tumor mit 20-60 Gy bestrahlt.

Radioaktive Quellen senden Alpha-, Beta- oder Gammastrahlung aus, die selbst bei gleicher Energie unterschiedlich gefährlich sind. Alphastrahlung besteht aus He-4 Kernen und ist rund 20 mal belastender als Beta- oder Gammastrahlung. Betastrahlung besteht aus Elektronen. Gammastrahlung besteht aus hochenergetischen Photonen. Der Unterschied wird durch einen *Gewichtungsfaktor* w_R in der *Äquivalentdosis* H berücksichtigt. Die Gewichtungsfaktoren ("Wichtungsfaktoren", engl. weights) werden durch statistische Auswertung von Strahlenunfällen festgesetzt und sind tabelliert.

$$H = w_R D \qquad \text{Äquivalentdosis}$$

$$[H] = \mathrm{Sv} \qquad \text{Einheit: Sievert}$$

Beispiel: Die mittlere Dosis aufgrund der Radonbelastung in der Schweiz beträgt 3.2 mSv in einem Jahr. Nehmen Sie an, die Belastung erfolge ausschliesslich wegen des Zerfalls von Rn-222. Berechnen Sie die dazu gehörende Energiedosis.

Radon-222 ist ein Alphastrahler. In einer Tabelle findet man, dass der Gewichtungsfaktor für Alphastrahlung den Zahlenwert 20 hat.

$$D = \frac{H}{w_R} = \frac{3.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Sv}}{20\,\mathrm{Sv/Gy}} = \underline{\underline{0.16\,\mathrm{mGy}}}$$

Zurück zum Formelblatt.

Masse-Energie Äquivalenz

Pflicht

“Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um ΔE, so ändert sich die Masse in demselben Sinne um $\Delta E/c^2$” (A. Einstein, Annalen der Physik, 21. Nov. 1905, S. 314)

Die Masse (Trägheit) eines Körpers ist proportional zu dessen innerer Energie.

$$E = mc^2 \qquad c\text{: Lichtgeschwindigkeit im Vakuum}$$

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

Beispiel: Eine warme Bettflasche (1.0 kg Wasser bei 50 °C) kühlt auf 20 °C ab. Berechnen Sie die Veränderung der Masse.

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{c_w m(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{c^2} = \frac{4182\,\mathrm{J/(kg\cdot K)} \cdot 1.0\,\mathrm{kg} \cdot (20-50)\,^\circ\mathrm{C}}{(3.00\cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} = \underline{\underline{-1.4\cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}}}$$

Alltägliche Energieumsätze sind nur mit geringen Masseänderungen verbunden.

Beispiel: Wie viel Energie in MeV wird frei, wenn vier Wasserstoffatome zu einem Heliumatom fusioniert werden?

$$\begin{aligned}\Delta E &= (4m_{\text{H-1}} - m_{\text{He-4}})\cdot c^2\\ &= (4\cdot 1.007\,825\,0\,\mathrm{u} - 4.002\,603\,3\,\mathrm{u})\cdot 931.49\,\mathrm{MeV/u} = \underline{\underline{26.731\,\mathrm{MeV}}}\end{aligned}$$

Zurück zum Formelblatt.

Energie eines Photons

Pflicht

Ein Photon (Licht-Quant) trägt die Energie

$$E = hf$$
$$h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} \qquad \text{exakt}$$

wobei f die Frequenz der elektromagnetischen Strahlung und h das Planck'sche Wirkungsquantum ist.

Beispiel: Wie viel Energie trägt ein Photon der Strahlung in einem Mikrowellenofen? Die Frequenz der Mikrowellen ist 2.4 GHz.

$$E = hf = 6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 2.4 \cdot 10^{9}\,\mathrm{Hz} = \underline{\underline{1.6 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J}}}$$

Beispiel: Eine Natriumdampflampe sendet Licht der Wellenlänge 589 nm aus. Berechnen Sie die Energie eines Photons dieser Strahlung.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{589 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{3.37 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}} = 2.10\,\mathrm{eV}$$

Zurück zum Formelblatt.

Photonenimpuls und Materiewellen

Kür

Nach Einstein hat ein Photon Impuls. Nach de Broglie haben Teilchen Welleneigenschaften.

$p = h/\lambda$	Impuls eines Photons nach Einstein
$\lambda = h/p$	Zu einem Materieteilchen gehörende Wellenlänge nach de Broglie

Beispiel: Welchen Rückstoss (in m/s) erhält ein Natriumatom, wenn es ein Photon von Licht der Wellenlänge 589 nm aussendet?

$mv = h/\lambda$ Impulserhaltungssatz

$$v = \frac{h}{m \cdot \lambda} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{22.99\,\mathrm{u} \cdot 1.661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/u} \cdot 589 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{2.95\,\mathrm{cm/s}}}$$

Beispiel: Welche Wellenlänge gehört zu einem Elektron, das aus dem Stillstand mit einer elektrischen Spannung von 300 V beschleunigt wurde?

$$W = eU = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{\sqrt{2 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 300\,\mathrm{V}}} = \underline{\underline{7.1 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}}}$$

Das Elektron im Beispiel zeigt gewisse Welleneigenschaften, aber es ist keine Welle im klassischen Sinn. In der Quantenphysik wird das Elektron mit einer 'Zustandsfunktion' beschrieben, welcher eine Frequenz respektive eine Wellenlänge zugeschrieben werden kann.

Zurück zum Formelblatt.

Index