Überlagerung harmonischer Schwingungen

Superposition zweier gleichfrequenter, paralleler Schwingungen

Das Experiment zeigt, dass die Überlagerung eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz ist, deshalb können wir Gleichung (26) ansetzen (und der Erfolg rechtfertigt den Ansatz).

$$\hat{y}_3 \sin(\omega t + \varphi_3) = \hat{y}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \tag{26}$$

Wie gross sind die Amplitude $\hat{y}_3$ und Phase φ_3 der resultierenden Schwingung?
Gleichung (26) muss zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Setzt man $t = 0$, so erhält man Gleichung (27), setzt man $\omega t = \pi/2$ und beachtet, dass $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha$ ist, so ergibt sich (28):

$$\hat{y}_3 \sin\varphi_3 = \hat{y}_1 \sin\varphi_1 + \hat{y}_2 \sin\varphi_2 \tag{27}$$

$$\hat{y}_3 \cos\varphi_3 = \hat{y}_1 \cos\varphi_1 + \hat{y}_2 \cos\varphi_2 \tag{28}$$

Dividieren wir nun entsprechende Seiten von (27) und (28) durcheinander, so erhalten wir Gleichung (29) für die Anfangsphase φ_3 der resultierenden Schwingung.

$$\tan\varphi_3 = \frac{\hat{y}_1 \sin\varphi_1 + \hat{y}_2 \sin\varphi_2}{\hat{y}_1 \cos\varphi_1 + \hat{y}_2 \cos\varphi_2} \tag{29}$$

Die Richtige der zwei Lösungen $\varphi_3 = \arctan(\dots)$ und $\varphi_3' = \pi + \arctan(\dots)$ von (29) kann man finden, indem man probeweise in (27) einsetzt.

Quadrieren wir (27) und (28) beidseits und addieren die Gleichungen, so erhalten wir eine Gleichung für die Amplitude $\hat{y}_3$ der resultierenden Schwingung:

$$\hat{y}_3^2 \left(\sin^2\varphi_3 + \cos^2\varphi_3\right) = (\hat{y}_1 \sin\varphi_1 + \hat{y}_2 \sin\varphi_2)^2 + (\hat{y}_1 \cos\varphi_1 + \hat{y}_2 \cos\varphi_2)^2 \tag{30}$$

Beachtet man, dass $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta)$ ist, folgt:

$$\hat{y}_3^2 = \hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{31}$$

Überlagern sich mehr als zwei Schwingungen, so werden diese so lange paarweise kombiniert, bis man die resultierende Schwingung hat. Es ist kein Zufall, dass Gleichung (31) wie der Kosinussatz aussieht. Dieselbe Beziehung kann auch mit sogenannten Zeigerdiagrammen hergeleitet werden.

Spezialfälle
a) Die Schwingungen sind in Phase (synchron, Gleichtakt).

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{y}_3 = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$$

b) Die Schwingungen erfolgen im Gegentakt oder gegenphasig.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{y}_3 = |\hat{y}_1 - \hat{y}_2|$$

1. Aufgabe
i) Sei $\hat{y}_1 = 1.31\,\text{cm}$, $\varphi_1 = 1.41\,\text{rad}$, $\hat{y}_2 = 2.50\,\text{cm}$, $\varphi_2 = 0.264\,\text{rad}$. Berechnen Sie $\hat{y}_3$ sowie φ_3.
ii) Dasselbe für $\hat{y}_1 = 1.31\,\text{cm}$, $\varphi_1 = 1.41\,\text{rad}$, $\hat{y}_2 = 2.50\,\text{cm}$, $\varphi_2 = 2.64\,\text{rad}$.

Überlagerung zweier Schwingungen ähnlicher Frequenz: Schwebung

$$y(t) = \hat{y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad \text{wobei} \quad \omega_1 \approx \omega_2 \qquad \text{aber} \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

Die Kreisfrequenzen sollen verschieden, aber ähnlich gross sein. Wir behandeln nur den Spezialfall $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ausführlich. In der Formelsammlung steht die Summen-Produkt-Regel:

$$\hat{y}\sin(\omega_1 t) + \hat{y}\sin(\omega_2 t) = \underbrace{2\hat{y} \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right)}_{A(t)} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t\right)}_{\sin(\overline{\omega}\, t)}$$

Das Produkt können wir als harmonische Schwingung mit der mittleren Frequenz $\overline{\omega}$ und langsam veränderlicher Amplitude $A(t)$ interpretieren, siehe Abbildung 679. Die Amplitude verändert sich langsam, da nach Voraussetzung $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ und $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_2$ ist.

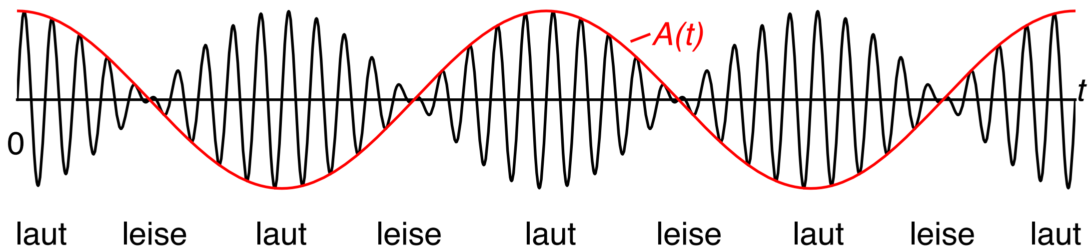


Abbildung 679: Überlagerung zweier Schwingungen ähnlicher Frequenz und gleicher Amplitude: Die resultierende Schwingung heisst Schwebung. Eine Schwebung sieht aus wie eine harmonische Schwingung mit langsam veränderlicher Amplitude $A(t)$.

Schlägt man zwei leicht gegeneinander verstimmte Stimmgabeln an, so hört man eine schnelle Lautstärkevariation. Die Frequenz der hörbaren Lautstärkevariation oder Schwebungsfrequenz ist $f_S = |f_1 - f_2|$, also doppelt so gross wie die Frequenz der Amplitudenfunktion $A(t)$, vergleiche Abb. 679. Diesen Effekt kann man zum Stimmen von Instrumenten brauchen. Die Schwebungsfrequenz wird umso kleiner, je näher sich die Frequenzen der zwei Teilschwingungen sind. Sind die zwei Frequenzen gleich, so tritt keine Schwebung mehr auf.

Joseph Saveur (1653-1716) entwickelte um 1700 die Theorie der akustischen Schwebungen und berechnete mit ihrer Hilfe die Frequenzunterschiede zwischen Orgelpfeifen. Er hat auch entdeckt, dass eine Saite gleichzeitig mehrere Partialschwingungen tragen kann.

2. Aufgabe: Zeichnen Sie auf dem Computer die Superposition zweier Schwingungen mit $\omega_1 = 2\pi \cdot 9\,\mathrm{s}^{-1}$ und $\omega_2 = 2\pi \cdot 10\,\mathrm{s}^{-1}$ für den Fall $\hat{y}_1 \neq \hat{y}_2$.

Superposition vieler harmonischer Schwingungen: Fourierreihen

$$y(t) = \hat{y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \hat{y}_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3) + \ldots$$

Obige trigonometrische Reihe ergibt nur unter speziellen Bedingungen etwas Schönes; ein solches Beispiel ist unten formal dargestellt und in Abbildung 680 graphisch zu sehen.

$$y(t) = \frac{4a}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t) + \ldots\right) \tag{32}$$

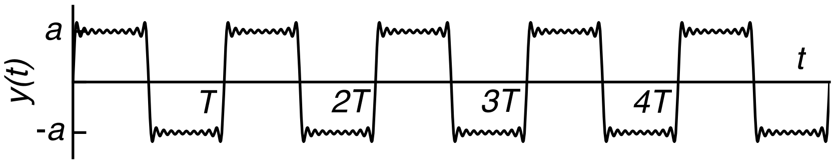


Abbildung 680: Teilsumme der Reihe (32) bis $\sin(19\omega t)$. *Die ganze Reihe ergibt eine Rechteckschwingung.*

3. Aufgabe: a) Welche Funktion wird durch folgende Reihe dargestellt?

$$y(t) = \frac{4a}{\pi}\left(\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - \frac{1}{7^2}\sin(7\omega t) + \frac{1}{9^2}\sin(9\omega t) - \ldots\right)$$

Satz von Fourier: (Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier, 1768-1830)
Jeder periodische Vorgang lässt sich als Summe harmonischer Schwingungen darstellen.

$$y(t) = \hat{y}_0 + \hat{y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(2\omega_1 t + \varphi_2) + \hat{y}_3 \sin(3\omega_1 t + \varphi_3) + \ldots$$

$$\omega_1 = 2\pi/T \qquad T \text{ ist die Periodendauer der Funktion } y(t)$$

Mit dem Satz von Fourier kann jeder periodische Vorgang in harmonische Schwingungen zerlegt werden. Wie sich diese entwickeln, weiss man. Danach werden die Schwingungen wieder zusammengesetzt. Fourier hat so das Problem der Wärmeleitung auf einem Ring gelöst. Fourier's Methode kann auch auf Wellen und aperiodische Vorgänge übertragen werden; bei letzteren ist lediglich die Periode unendlich gross (Fourierintegral).

3. Aufgabe: b) Zeigen Sie, dass Fourierreihen völlig äquivalent auch so geschrieben werden können:

$$y(t) = a_0 + a_1 cos(\omega t) + b_1 sin(\omega t) + a_2 cos(2\omega t) + b_2 sin(2\omega t) + a_3 cos(3\omega t) + b_3 sin(3\omega t) + \ldots$$

Die zweite Darstellungen ist rechnerisch oft einfacher. Mathematische Details wie Konvergenz der Reihen usw. möge man in der Fachliteratur nachlesen. Man beachte, dass in der Fourier-Reihe nur die Frequenzen $0, f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, 5f_1$, etc. vorkommen. Frequenzen, die ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz $f_1 = 1/T$ sind, heissen *Harmonische* der Grundfrequenz.

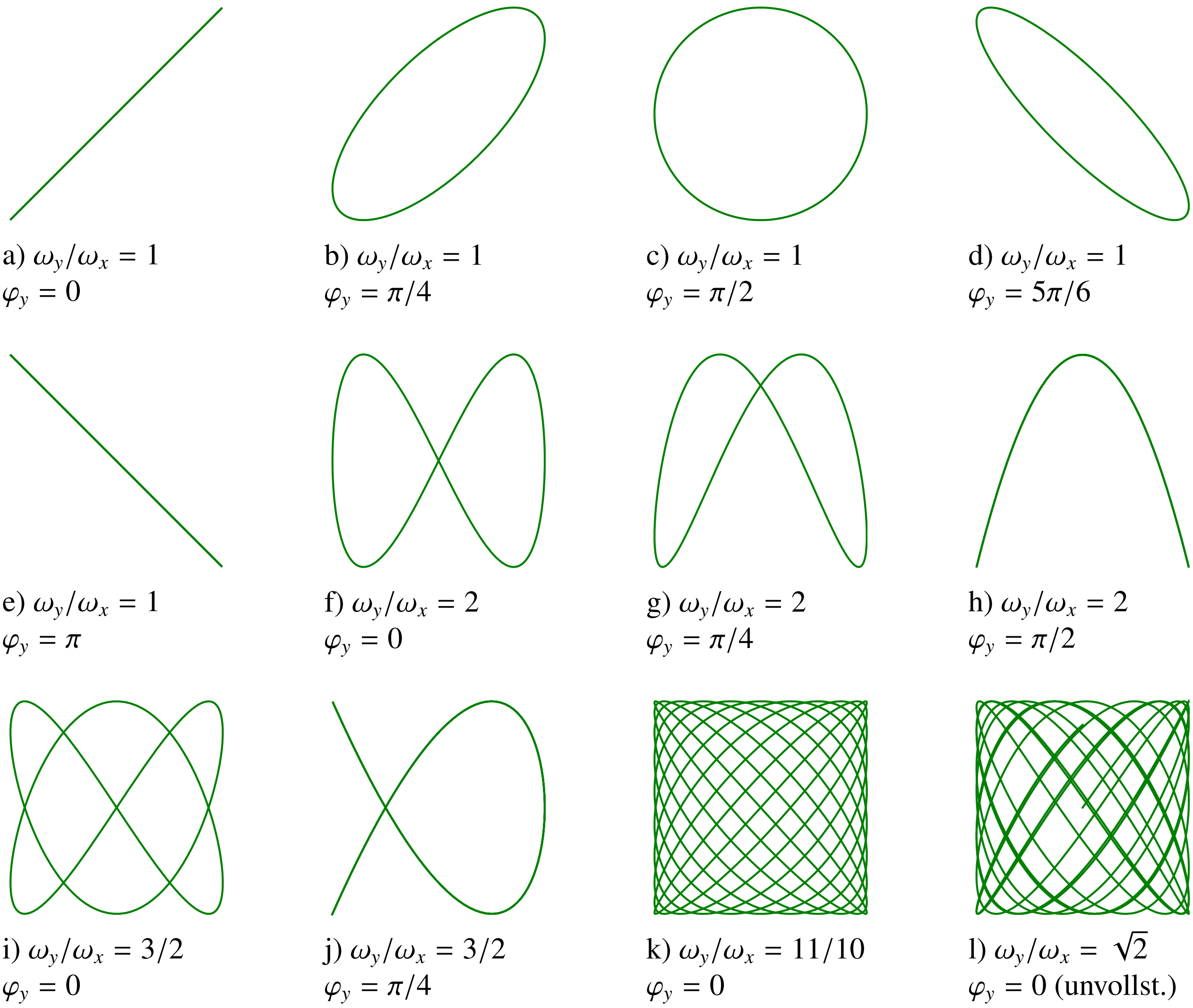
Fourieranalyse nennt man die Bestimmung der Werte $\hat{y}_0$, $\hat{y}_1$, φ_1, $\hat{y}_2$, φ_2, $\hat{y}_3$, .. bei gegebenem $y(t)$, *Fouriersynthese* die Bestimmung von $y(t)$ aus der trigonometrischen Reihe. Besonders einprägsam ist dieser Vorgang in der musikalischen Akustik: Ein Klang besteht immer aus einem Grundton und vielen Obertönen. Viele Musikanlagen stellen deren Anteile am Klang graphisch dar (Equalizer). Umgekehrt lassen sich alle möglichen Klänge als Summe von Grund- und Obertönen darstellen. Synthesizer verwenden aber meist andere Methoden.

Überlagerung zweier Schwingungen entlang orthogonaler Geraden

$x(t) = \hat{x}\,\sin(\omega_x t + \varphi_x)$ $\qquad$ $y(t) = \hat{y}\,\sin(\omega_y t + \varphi_y)$

Demonstration: Werden der x- und y-Kanal eines Oszilloskops mit harmonischen Wechselspannungen belegt, so werden die nach Jules Lissajous, 1822-1880, benannten Figuren sichtbar. Die 1815 von Nathaniel Bowditch beschriebenen Kurven hängen von den Anfangsphasen und Frequenzverhältnissen der zwei Schwingungen ab. Die Figur steht still, wenn das Frequenzverhältnis rational ist. Ist das Verhältnis nur beinahe rational, so ergibt sich der Eindruck einer sich langsam drehenden Figur, falls der Bildschirm nicht zu lange nachleuchtet. Bei irrationalen Frequenzverhältnissen würde mit der Zeit das ganze Rechteck dicht überdeckt, siehe Abbildung 681 l.

Abbildung 681: Lissajous-Figuren. Die Kurven sind nur dann geschlossen, wenn das Frequenzverhältnis rational ist, z.B. $\omega_y : \omega_x = 11 : 10 \in \mathbb{Q}$. In allen Figuren ist $\hat{x} = \hat{y}$ sowie $\varphi_x = 0$.



4. Aufgabe
Wie sieht die Lissajous-Figur für $\omega_x = 4$, $\omega_y = 3$ (willkürliche Einheiten) und $\varphi_x = \varphi_y = 0$ aus?